I/ ELECTROSTATIQUE
الكهرباء الساكنة

L'électrostatique est l'étude des phénomènes produits par des charges électriques à l'état de repos.

Le mot **électricité** dérive du mot grec « **élektron** » qui signifie ambre. A l'origine, c'est Thalès de Milet (625 à 545 avant Jésus Christ), né à Ionie -côte ouest de la Turquie actuelle – qui a remarqué qu'un morceau d'ambre jaune frotté préalablement avec de la laine attire des brindilles de paille.

A/ NOTIONS FONDAMENTALES (المفاهيم الأساسية) :

1/ EXPERIENCES D'ELECTRISATION :

Si on approche un peigne à de petits bouts de papier, après s'être peigné, on voit que ces bouts sont attirés par le peigne. Le même phénomène se produit si on approche d'eux un bâton de verre frotté avec de la soie ou un bâton d'ambre frotté avec de la laine.

❖ **Première expérience** : (Figure 1.1-a)

On suspend par un fil une boule faite de sureau ou de polystyrène par exemple. On approche de cette boule une tige de verre ou d'ambre préalablement frottée : les deux tiges, chacune de son côté, l'attirent, puis la repoussent juste après l'avoir contactée. Par contre, si on approche simultanément les deux tiges côte à côte de la boule, rien ne se passe. (Figure 1.1-b)

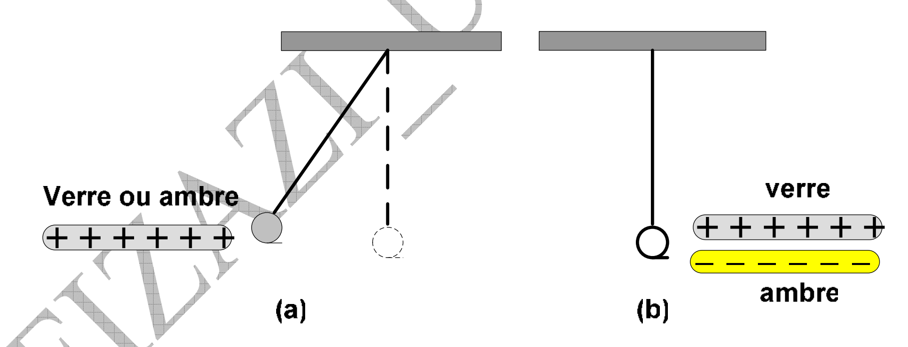


Fig 1.1 : Expérience d'électrisation

❖ **Deuxième expérience** : (Figure 1.2)

Si les deux boules de la figure 1.2, ont été électrisées suite à leur contact avec l'une des tiges frottées, elles se repoussent. Par contre les deux boules s'attirent si chacune d'elles a touché l'une des deux tiges qui a été frottée et qu'elle est de matière différente de celle de l'autre tige.

Nous en déduisons de ces expériences que ces matériaux ont acquis une nouvelle propriété qu'on appelle « électrisation ». Cette propriété crée une attraction beaucoup plus intense que l'attraction universelle produite entre deux masses.

Nous en concluons que chaque particule est caractérisée par deux propriétés principales et indépendantes :

- sa masse m
- Sa charge électrique q

Des expériences simples, comme celles que nous venons de décrire, montrent l'existence de deux états d'électrisation correspondant à deux types de charges électriques qualifiées de charge positive (+) et charge négative (-). Cette classification revient au physicien Benjamin Franklin (1706-1790). Nous rappelons la règle suivante :

Deux corps qui portent une charge électrique de même signe se repoussent, et s'attirent s'ils portent deux charges électriques de signes contraires.

D'après la figure 1.2, chaque boule s'électrise par la même charge que porte la tige frottée avec laquelle elle a été mise en contact.

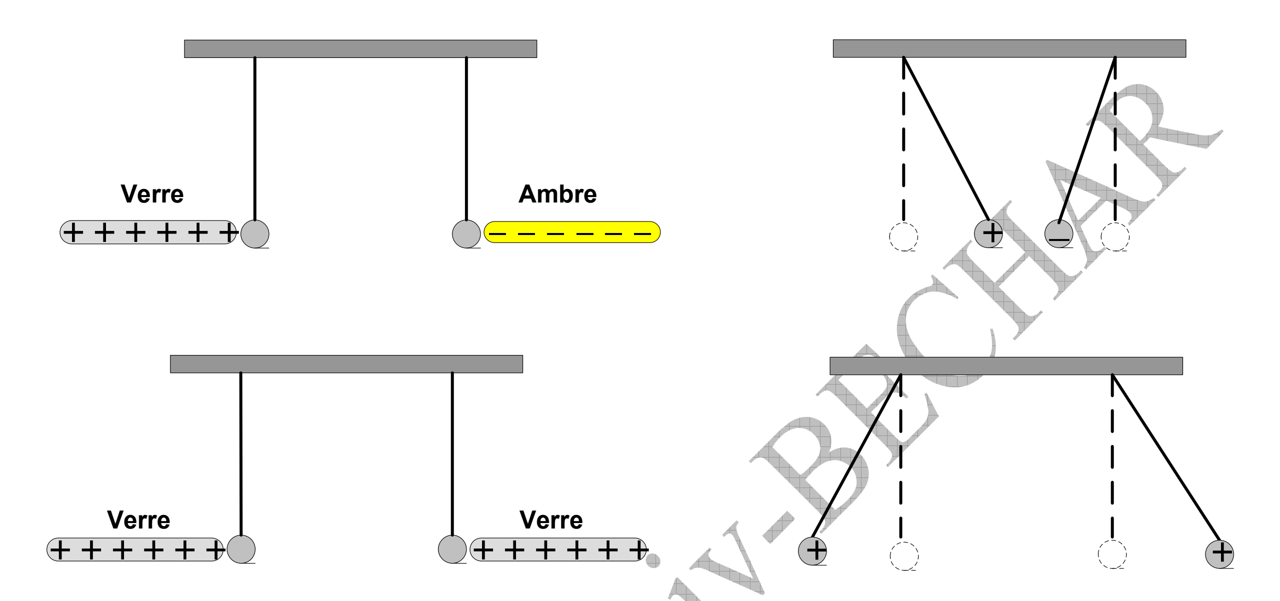


Fig1.2 : Électrisation, attraction et répulsion entre des charges

2/ CHARGE ELECTRIQUE ELEMENTAIRE ET QUANTIFICATION DE LA CHARGE ELECTRIQUE (الشحنة الأساسية و تكميم الشحنة الكهربائية)

Les propriétés électriques de la matière trouvent leur principe au niveau de l'atome.

La matière est constituée, comme on le sait, d'atomes. Chaque atome (ذرة) est constitué d'un noyau(نواة) (découvert en 1911 par Ernest Rutherford of Nelson 1871-1937), autour duquel gravite un nuage formé d'électrons(إلكترونات). Ces électrons se repoussent entre eux mais restent positionnés autour du noyau. Le noyau est constitué de protons(بروتونات), qui portent des charges positives, et de neutrons(نوترونات) qui son dépourvus de charge (découverts en 1932 par James Chadwick 1891-1935). L'ensemble des particules qui forment le noyau s'appelle nucléons(النوكليونات).

Les électrons et les protons portent la même charge électrique en valeur absolue qu'on note par e. Cette charge électrique est appelée la charge élémentaire (الشحنة الأساسية) ou quanta (كم) de la charge électrique dont la valeur est:

$$\boxed{e = 1{,}602.10^{-19}\ [\mathrm{A.s} = \mathrm{C}]} \qquad \textbf{(1.1)}$$

La force électrique qui s'exerce entre les protons, chargés positivement, et les électrons, chargés négativement, est responsable de la cohésion des atomes et des molécules. La charge totale des atomes non ionisés (c'est-à-dire qui n'ont ni perdu ni gagné d'électrons) est nulle.

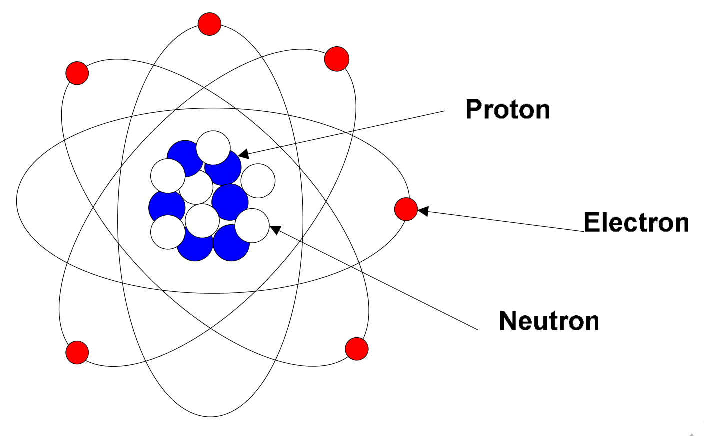


Fig1.3: structure de l'atome

Une charge électrique ne peut prendre n'importe quelle valeur. En effet chaque charge électrique est toujours un multiple entier de la charge élémentaire :

$$\boxed{q = \pm n.e \quad [\mathrm{A.s = C}]\ ,\ \mathrm{n} \in \mathrm{N}} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Ceci traduit le principe fondamental de la quantification de la charge électrique.

Dans un système fermé, la somme algébrique des charges électriques présentes est constante au cours du temps et ce , quelque soient les phénomènes qui se produisent dans ce système .

C'est là l'énoncé du principe de la conservation de la charge électrique d'un système fermé.

En réalité, l'étude poussée de la physique de haute énergie a prouvé que les protons et les neutrons sont eux-mêmes constitués d'autres particules élémentaires appelées quarks portant une charge électrique fractionnaire. Cependant, et jusqu'à nos jours les chercheurs n'ont pas pu isoler ces particules qui portent une partie de la charge élémentaire. Citons deux types de quarks : $u = +\frac{2}{3}e$, d= $-\frac{1}{3}e$

Exemple 1.1 : Calculer le nombre de charges élémentaires qui constitue une charge de 1 coulomb.

Réponse : $n = \dfrac{1}{1{,}60.10^{-19}}$ et donc $n = 625.10^{16}$ charges élémentaires.

3/ CONDUCTEURS ET ISOLANTS (النواقل و العوازل)

N'importe quelle matière est constituée d'un grand nombre de charges électriques, cependant ces charges se compensent et s'annulent (nombre d'électrons = nombre de protons). A la température ordinaire, la charge électrique totale de la matière est nulle. Quand il se produit une électrisation, cela se traduit par un déplacement de charges d'un corps vers un autre.

Cette charge qui apparaît sur le corps, par excès ou par défaut, est responsable des effets électriques qui apparaissent sur le corps (comme la tige frottée par exemple).

Dans un atome, les électrons gravitent autour du noyau sur des couches distinctes. Les électrons des couches externes susceptibles de se libérer peuvent participer à la conductivité électrique.

Si la couche externe d'un élément chimique est proche de la saturation, elle ne peut donc céder aucun électron, mais cherche à capter un électron ou plus jusqu'à la saturation. Un tel élément est dit isolant. Par contre si la couche externe d'un élément chimique est loin de la saturation, alors l'élément perd facilement un électron ou plus. Un tel élément est considéré comme étant bon conducteur.

En conséquence, un bon conducteur est l'élément qui contient un grand nombre d'électrons libres (c'est-à-dire les électrons qui ont la liberté de se déplacer). Par contre, l'isolant est l'élément qui possède peu d'électrons libres. L'isolant idéal est celui qui ne possède aucun électron libre.

Notons que dans les liquides, les porteurs de charges sont les ions (الشّوارد).

En conclusion, nous disons d'un corps qu'il est un conducteur idéal si les porteurs de charges- après l'électrisation du corps- peuvent se déplacer en toute liberté dans tout le volume occupé par la matière. Le corps est classé isolant si les porteurs de charges restent dans la même région, là où elles sont apparues.

4/ EXPLICATION DU PHENOMENE D'ELECTRISATION (تفسير ظاهرة التكهرب)

Comme nous l'avons signalé auparavant, les atomes des matériaux contiennent dans leur état naturel un nombre équivalent d'électrons et de protons. Ces matériaux sont donc électriquement neutres (non chargés), et aucun effet électrique n'apparaît. Mais si cet équilibre naturel de charges est rompu- augmentation ou diminution du nombre d'électrons pour une raison quelconque- la matière devient alors chargée électriquement.

D'une façon générale, tous les phénomènes de l'électrisation s'expliquent par un déplacement d'électrons, en négligeant la variation de la masse qui accompagne l'opération de déplacement.

Le verre frotté, comme par exemple, perd des électrons, il s'électrise donc positivement. Quant au plastique frotté il capte des électrons et s'électrise négativement.

B/ LOI DE COULOMB-CAVENDISH (قانون كولومب-كافنديش) :

C'est le physicien français Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) qui a établit en 1785 la loi qui porte son nom. A noter que selon l'histoire des sciences, la loi de Coulomb aurait été découverte en premier par le physicien anglais Henry Cavendish, mais que ces travaux restèrent longtemps non publiés. Il est plus juste donc d'appeler cette relation, la loi de Cavendish-Coulomb.

1/ ETUDES QUANTITATIVE ET QUALITATIVE :

Pour faire la mesure quantitative de la force d'attraction ou de répulsion électrique entre deux corps chargés, nous pouvons réaliser le montage de la figure 1.4. Cette figure représente deux particules portant deux charges q_1 et q_2, de masses respectives m_1 et m_2, séparées par une distance .

A partir de cette expérience, on dégage les quatre caractéristiques suivantes de la force électrostatique $\vec{F}_e$:

- Sa direction est la droite passant par les deux charges,
- son intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux particules,
- Elle est proportionnelle à la charge de chacune des deux particules q_1 et q_2,
- pour une distance donnée entre les deux particules, son intensité est indépendante du signe de chacune des deux charges.

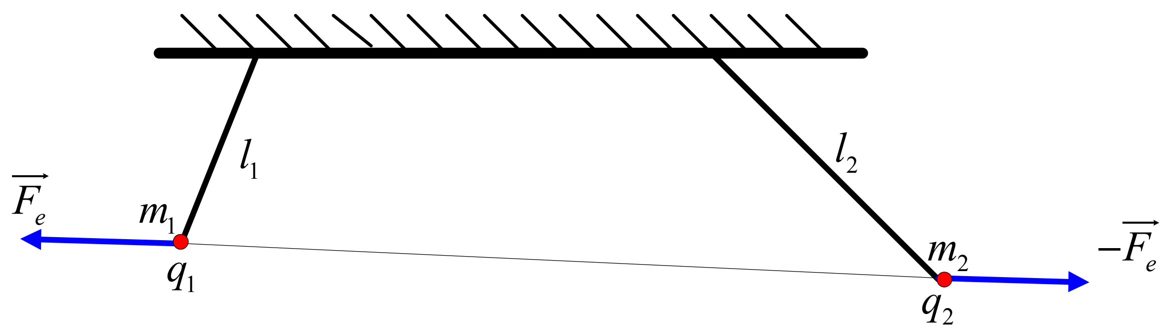


Fig 1.4 : montage pour vérifier la loi de Coulomb-Cavendish

La force électrostatique qu'exerce la charge q_1 sur la charge q_2, et vis versa, est exprimée par la formule expérimentale sous forme :

Vectorielle :

$$\boxed{\vec{F}_e = K.\frac{q_1.q_2}{r^2}\vec{u} \qquad [\mathrm{N}]} \qquad \textbf{(1.3)}$$

$\vec{u}$ représente le vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

Scalaire :

$$\boxed{F_e = K.\frac{|q_1.q_2|}{r^2} \quad [\mathrm{N}]} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Dans le système international des unités, la constante K est définie par la relation :

$K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, où ε_0 représente la permittivité du vide(سماحية أو نفاذية الفراغ).

La valeur expérimentale de K est :

$$K = 8{,}9875.10^{+9}\left[\frac{\mathrm{Nm}^2}{C^2}\right]$$

Pratiquement nous prenons $K \simeq 9.10^{+9}\left[\mathrm{Nm}^2\mathrm{C}^{-2}\right]$

Donc ε_0 prend la valeur : $\varepsilon_0 = 8{,}8542.10^{-12}\left[\dfrac{C^2}{N.m^2}\right]$ **(1.5)**

Il existe une autre relation pour le calcul de ε_0 qui est $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi c^2}$ où c représente la célérité de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8 ms^{-1}$).

Discussion :

$q_1.q_2 \succ 0$: les deux charges sont de même signe $\Rightarrow$ il y a répulsion, la force $\vec{F}_e$ éloigne les deux charges.

$q_1.q_2 \prec 0$: les deux charges sont de signes contraires $\Rightarrow$ il y a attraction, la force $\vec{F}_e$ rapproche les deux charges.

D'après le principe de l'action et de la réaction $\vec{F}_{q_1} = -\vec{F}_{q_2}$.

L'expression de la loi de Coulomb nous rappelle celle de la force de l'attraction universelle que nous avons rencontrée dans le cours de mécanique. A l'exception de la valeur numérique de la constante K, cette loi a exactement les mêmes caractéristiques vectorielles que celles de la force d'attraction universelle (loi de Newton). C'est pour cette raison qu'il n'est pas étonnant de trouver une similitude entre les deux forces.

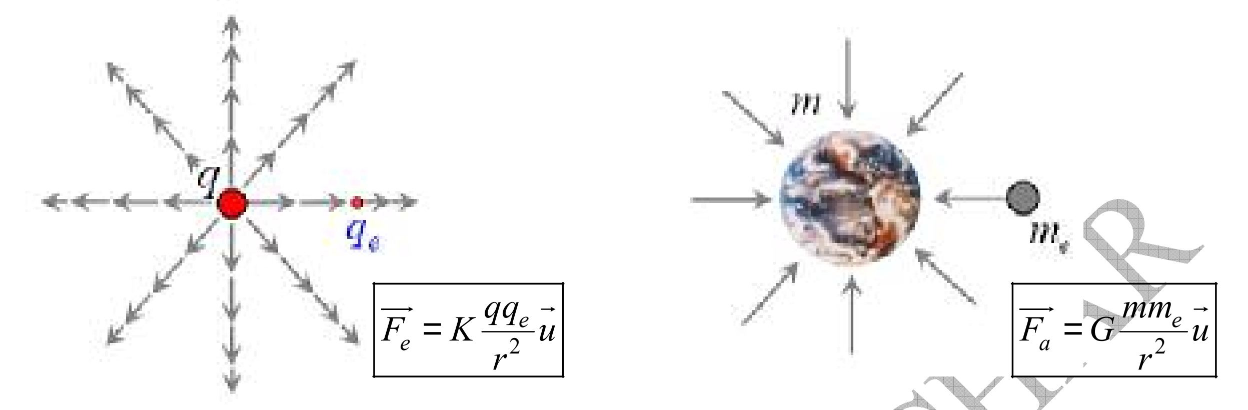


Fig 1.5 : Comparaison entre la force newtonienne et la force Coulombienne

Exemple 1.2 :

Quel est le rapport entre la force newtonienne de l'attraction universelle et la force coulombienne de répulsion entre deux électrons ?

Réponse :

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K\frac{e^2}{r^2}}{G\frac{m_e^2}{r^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{F_e}{F_g} = \frac{K.e^2}{G.m_e^2}} \;;\; \boxed{\frac{F_e}{F_g} \approx 4.10^{42}}$$

Exemple 1.3 :

Quelle est la force de répulsion coulombienne entre deux charges de $1C$ séparées par la distance de $1km$?

Réponse :

$$\boxed{F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q^2}{r^2}} \;;\; F_e = 9.10^9\frac{1}{(10^3)^2} \;;\; \boxed{F_e = 9.10^3\,N}$$

Remarque :

Dans le cas général, si on a n charges électriques dans le vide, le principe de superposition (مبدأ التراكب) permet de faire la somme vectorielle des forces électrostatiques. Ce principe n'est valable que dans le seul cas de charges au repos.

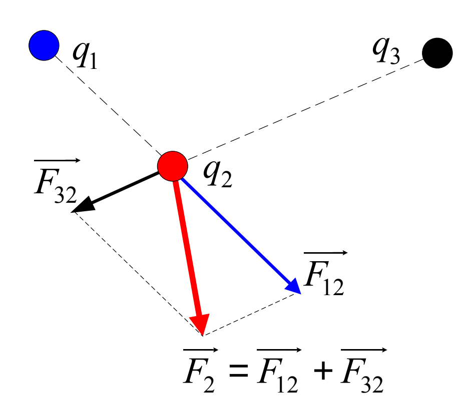


Fig 1.6 : Principe de superposition des forces

Exemple 1.4 :

A partir de la figure 1.7, calculer l'intensité de la résultante agissant sur la charge q_3 .

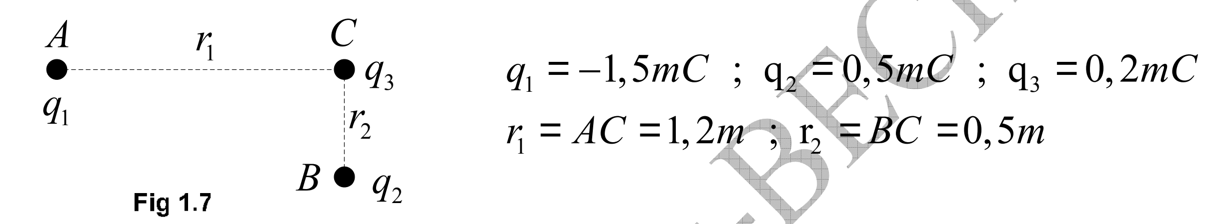


Fig 1.7

$q_1 = -1,5mC$; $q_2 = 0,5mC$; $q_3 = 0,2mC$

$r_1 = AC = 1,2m$; $r_2 = BC = 0,5m$

Réponse :

Raisonnons à partir de la figure 1.8 :

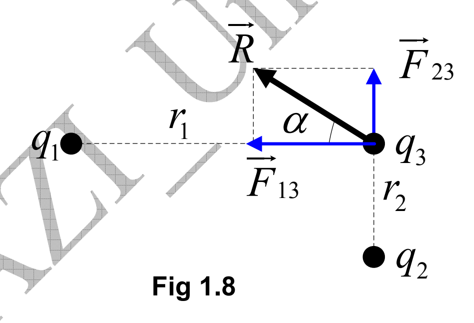


Fig 1.8

Puisque $q_1.q_3 \prec 0$, donc $\vec{F}_{13} \prec 0$ est une force d'attraction,

Et puisque $q_2.q_3 \succ 0$, donc $\vec{F}_{23} \succ 0$ est une force de répulsion.

D'où :

$$\vec{F}_{13} = -K\frac{q_1 q_3}{r_1^2}\vec{u}_1 \;\; ; \;\; F_{13} = 9.10^9\,\frac{1,5.10^{-3} \times 0,2.10^{-3}}{(1,2)^2} \Rightarrow F_{13} = 1,875.10^3\,N$$

$$\vec{F}_{23} = K\frac{q_2 q_3}{r_2^2}\vec{u}_2 \;\; ; \;\; F_{23} = 9.10^9\,\frac{0,5.10^{-3} \times 0,2.10^{-3}}{(0,5)^2} \Rightarrow F_{23} = 3,6.10^3\,N$$

$$R = \sqrt{F^2_{13} + F^2_{23}} \Rightarrow \boxed{R = 4,06.10^3\,N}$$

Quant à l'angle α que forme la résultante $\vec{R}$ avec la droite AC il est égal à :

$$\tan\alpha = \frac{F_{23}}{F_{13}} \;\; ; \;\; \tan\alpha = 1,92 \Rightarrow \boxed{\alpha = 62.49°}$$

C/ CHAMP ELECTROSTATIQUE (الحقل الكهروساكن):

Le fait que deux charges voisines soient soumises à deux forces d'attraction ou de répulsion, nous entraîne à considérer que toute chaque charge électrique modifie les propriétés physiques du champ spatial qui l'entoure. Pour décrire cette modification, on dit que toute charge électrique crée dans le champ spatial qui l'entoure un **champ électrique**.

1/ NOTION DE CHAMP ELECTRIQUE (مفهوم الحقل الكهربائي):

Définition qualitative : On dit qu'il existe un champ électrique en un point donné de l'espace, si une force électrostatique $\vec{F}_e$ agit sur une charge électrique q_0 ponctuelle placée en ce point.

Définition quantitative : On appelle champ électrostatique $\vec{E}$, le rapport entre la force électrostatique $\vec{F}_e$ et la charge q_0 soumise à cette force $\vec{F}_e$. figure1.9.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Dans le système international des unités, le champ électrique est exprimé en volt par mètre (Vm^{-1}).

Puisque $\vec{E}(M) = \dfrac{\vec{F}_e}{q_0}$, cela implique que $\vec{E}(M)$ et $\vec{F}_e$ ont la même direction. Quant au sens du champ, il dépend dans ce cas du signe de q_0 , c'est-à-dire de la charge qui est soumise à la force électrique. Fig1.10.

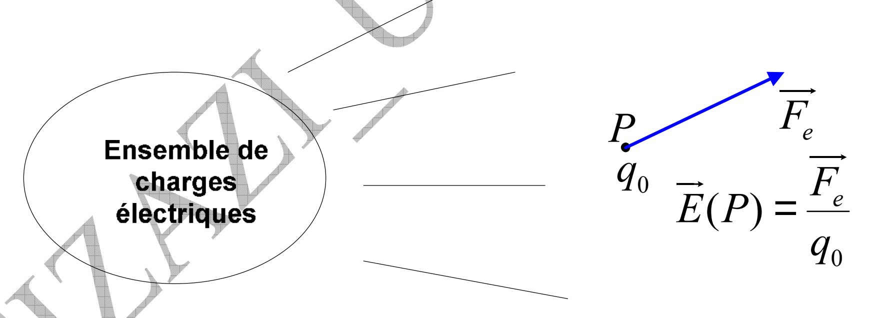


Fig 1.9 : Champ électrique en un point de l'espace

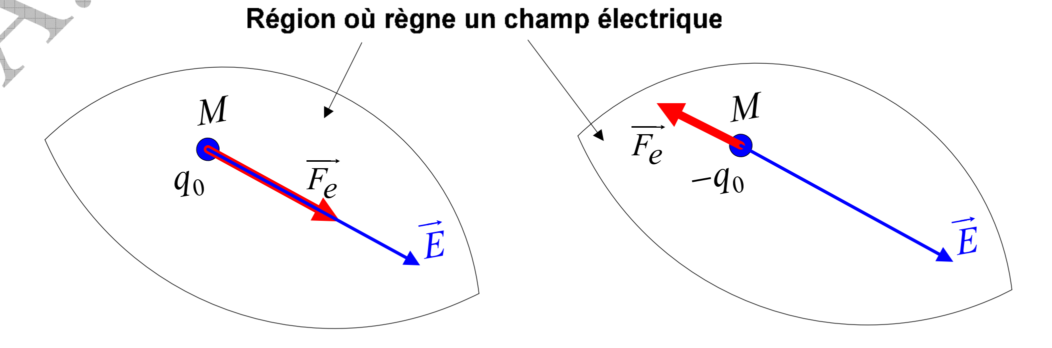


Fig 1.10 : Champ électrique produit par une charge

2/ CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE (الحقل الكهروساكن الناتج عن شحنة نقطية) :

Définition : lorsqu'une charge q se trouve au point O, elle crée alors, en tout point M de l'espace qui l'entoure un champ vectoriel, appelé champ électrostatique exprimé par la relation :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_e}{q_M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u} \qquad \textbf{(1.7)}$$

q : la charge présente au point O.

q_M : une charge teste placée au point M (elle n'a aucune influence sur le calcul du champ électrique), elle subit l'action de la force $\vec{F}_e$.

M $\vec{E}(M)$ $\vec{u}$ $r = OM$ O q

Fig 1.11 : Champ électrique crée par une charge ponctuelle

En résumé, le champ électrique produit par une charge ponctuelle est:
- radial: sa direction passe par la charge
- dirigé vers l'extérieur si $q \succ 0$,
- dirigé vers l'intérieur si $q \prec 0$,

Son intensité: $E(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}$ (1.8)



Fig 1.12 : Sens du champ électrique dans les deux cas, d'une charge positive, et d'une charge négative

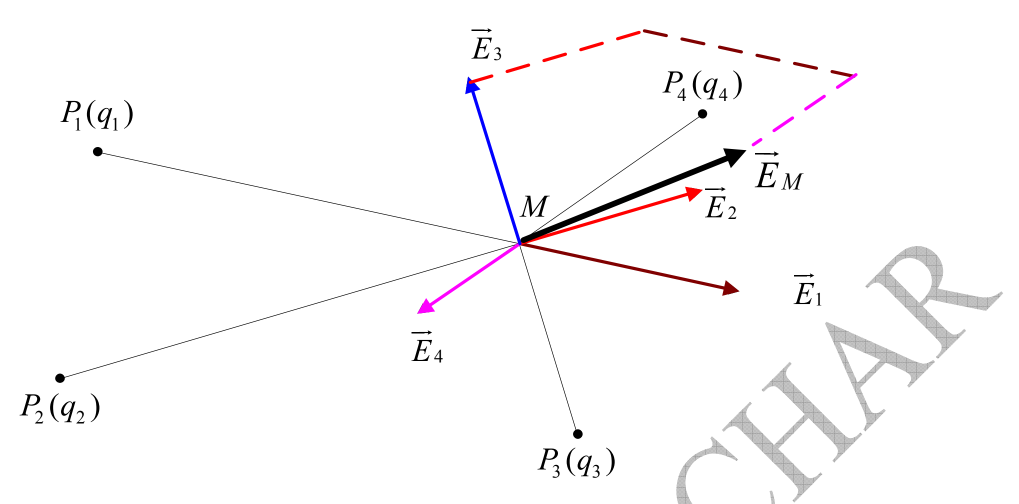
3/ CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UN ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES (الحقل الكهربائي الناتج عن عدة شحنات نقطية) :

Si maintenant, on a n particules électriques q_i, situées aux points P_i, quel serait alors le champ électrique produit par cet ensemble de charges au point M ?

Comme pour les forces, le principe de superposition est aussi valable pour les champs électriques. (Un principe ne peut pas être démontré mais il trouve sa vérification dans l'expérience).

La figure 1.13 montre la méthode géométrique à suivre pour la composition de plusieurs champs électriques. On a donc :

$$\vec{E}(M)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad \textbf{(1.9)}$$



M**Fig 1.13 : Composition des champs en un point**

4/ CHAMP ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES (الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع مستمر للشحنة) :

Dans le cas d'un très grand nombre de particules, celles ci peuvent être réparties uniformément suivant une droite, sur une surface plane ou dans un volume.

Dans une telle répartition de charge, le principe de superposition reste toujours valable. On divise cette répartition en un nombre infini de très petits volumes, ou surfaces, ou segments rectilignes élémentaires chargés, puis on calcule le champ $d\vec{E}$ que chacun de ces éléments crée. On fai ensuite la somme vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$. Comme on prend des éléments infiniment petits, on transforme la somme $\left(\sum\right)$ en une intégrale triple $\left(\iiint\ \right)$, double $\left(\iint\ \right)$ ou simple $\left(\int\ \right)$, selon que l'on considère un volume, une surface ou une longueur.

On aura donc :

$$\vec{E}=\int d\vec{E} \qquad \textbf{(1.10)}$$

Attention !! Ne pas croire que $E=\int dE$, car les $d\vec{E}$ sont des vecteurs non forcément parallèles entre eux. Il serait donc archifaux de faire la somme de leurs modules $\left(E\neq\int dE\right)$.

Dans un système d'axes cartésiens O_{xyz} , on a :

$$d\vec{E}=dE_x.\vec{i}+dE_y.\vec{j}+dE_z.\vec{k} \qquad \textbf{(1.11)}$$

Par intégration on arrive à :

$$\vec{E}=\int\left(dE_x.\vec{i}+dE_y.\vec{j}+dE_z.\vec{k}\right)=E_x.\vec{i}+E_y.\vec{j}+E_z.\vec{k} \qquad \textbf{(1.12)}$$

On obtient par la suite :

$$E_x=\int dE_x \ \ ,\ \ E_y=\int dE_y \ \ ,\ \ E_z=\int dE_z \qquad \textbf{(1.13)}$$

En tous les cas, la relation qu'il faut retenir est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M)} \quad \textbf{(1.14)}$$

Sachant que :

$$\boxed{d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u}} \quad \textbf{(1.15)}$$

Pour éclaircir encore plus ce principe on va étudier un peu plus loin trois applications.

5/ LIGNES OU SPECTRE DE CHAMP (خطوط الحقل الكهربائي)أو الطيف الكهربائي) :

❖ **Description de l'expérience :** dans un récipient contenant de l'huile, plongeons deux électrodes chargées, l'une positivement $(q_1 \succ 0)$ et l'autre négativement $(q_2 \prec 0)$, et saupoudrons sur la surface d'huile des grains de la grosse semoule (ou des grains de gazon naturel).

❖ **Observation :** On voit que les grains de semoule (ou du gazon) dessinent des courbes que nous appelons lignes du champ électrique. Figure 1.14.

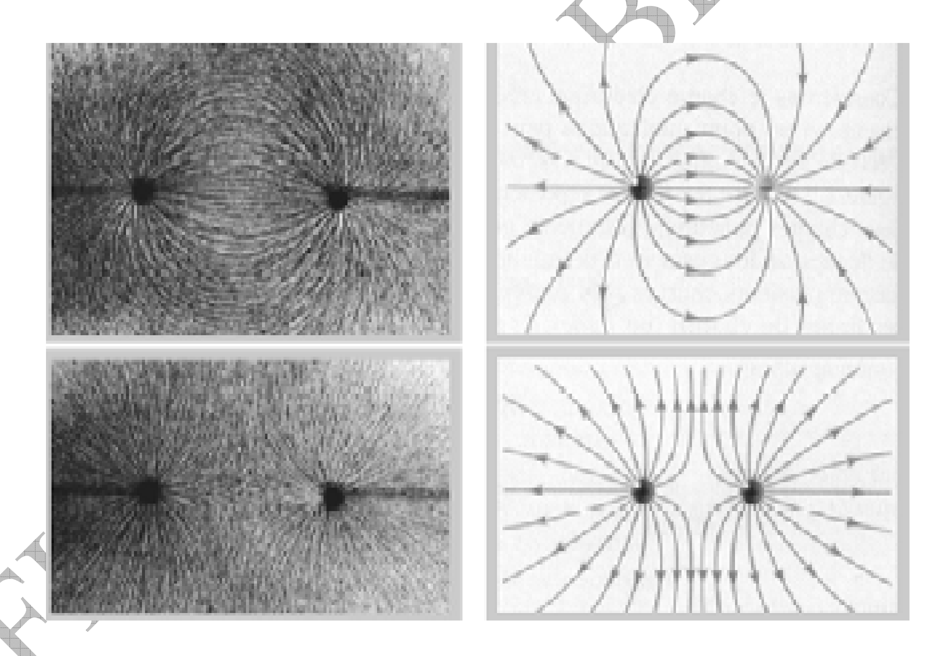


Fig 1.14 : Grains de gazon à la surface d'huile, photos et schémas

❖ **Interprétation :** Sous l'effet du champ produit par les charges q_1 et q_2, les grains se polarisent. Ainsi chaque grain devient un dipôle électrique. Les charges sont alors soumises aux forces électriques appliquées par q_1 et q_2. Ces forces sont responsables de l'orientation de chaque grain parallèlement aux forces. Figure1.15.

Définition : Les lignes de champ sont des lignes orientées, tangentes en chaque point au vecteur champ $\vec{E}$ et passent par la charge q. Figure 1.16.

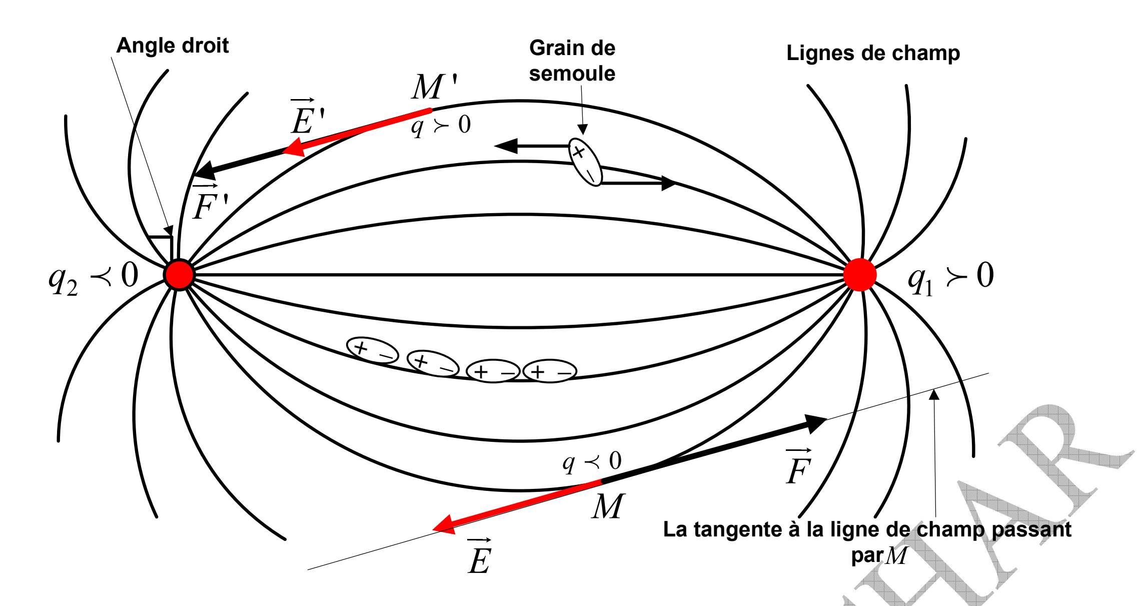


Fig 1.15 : Lignes de champ dessinées par les grains de semoule

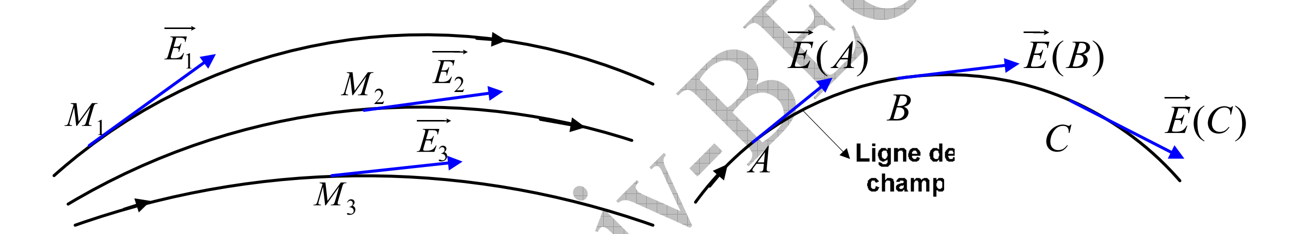


Fig 1.16 : Lignes de champ électrique

Dans le cas d'une charge ponctuelle, les lignes de champ sont des demi-droites qui se coupent au point où se trouve la charge. Si la charge est positive, le champ est dirigé vers l'extérieur, on dit qu'il est partant, il en va de même pour les lignes de champ. Le contraire est vrai pour la charge négative, les lignes de champ convergent vers la charge, le champ dans ce cas est dirigé vers la charge. Figure 1.17.



Fig 1.17 : Lignes de champ pour les deux types de charges séparées

La figure 1.18 représente les lignes de champ autour de deux charges ponctuelles voisines égales mais de signes contraires.

La figure 1.19 représente les lignes de champ autour de deux charges ponctuelles voisines égales portant la même charge.

La figure 1.20 représente les lignes d'un champ uniforme (il existe entre deux plaques parallèles rapprochées, portant des charges égales en valeur absolue, mais de signes contraires). A l'exception des bords du condensateur formé, les lignes de champ à l'intérieur du condensateur sont parallèles entre elles et perpendiculaires au deux plaques et d'égales densités.

La figure 1.21 représente les lignes de champ d'un conducteur en pointe.

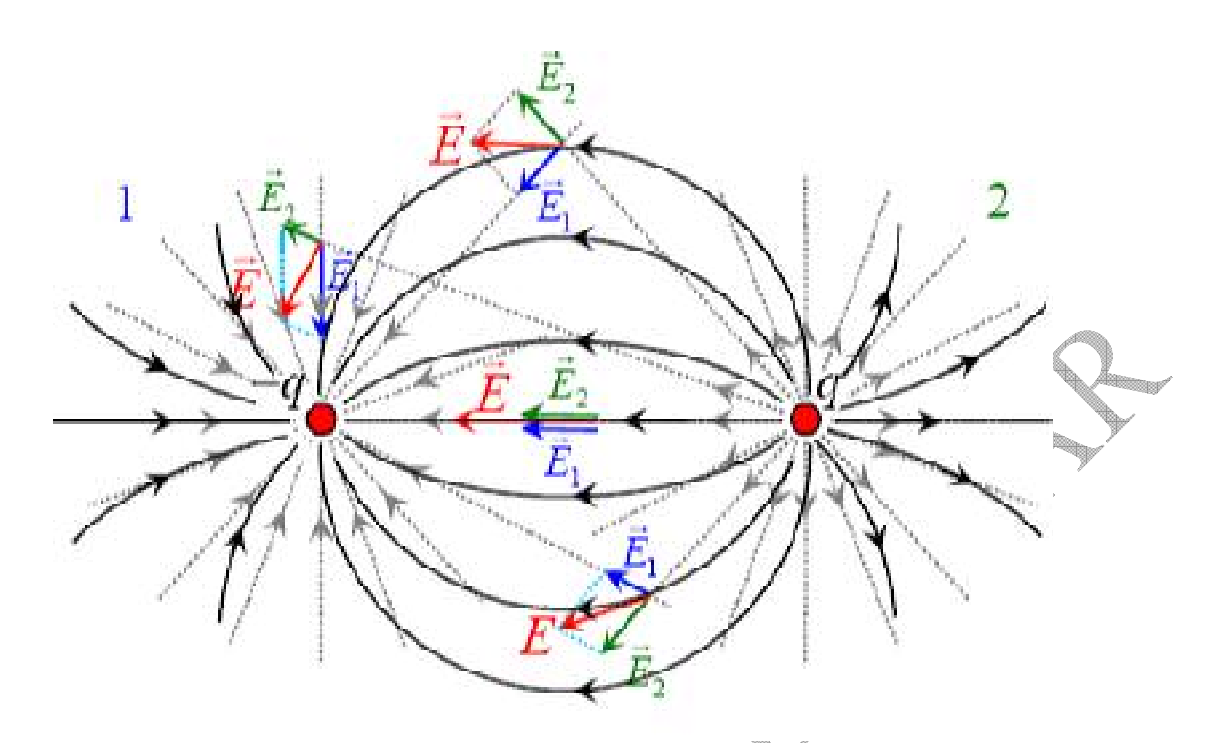


Fig 1.18 : Lignes de champ de deux charges égales et de signes contraires

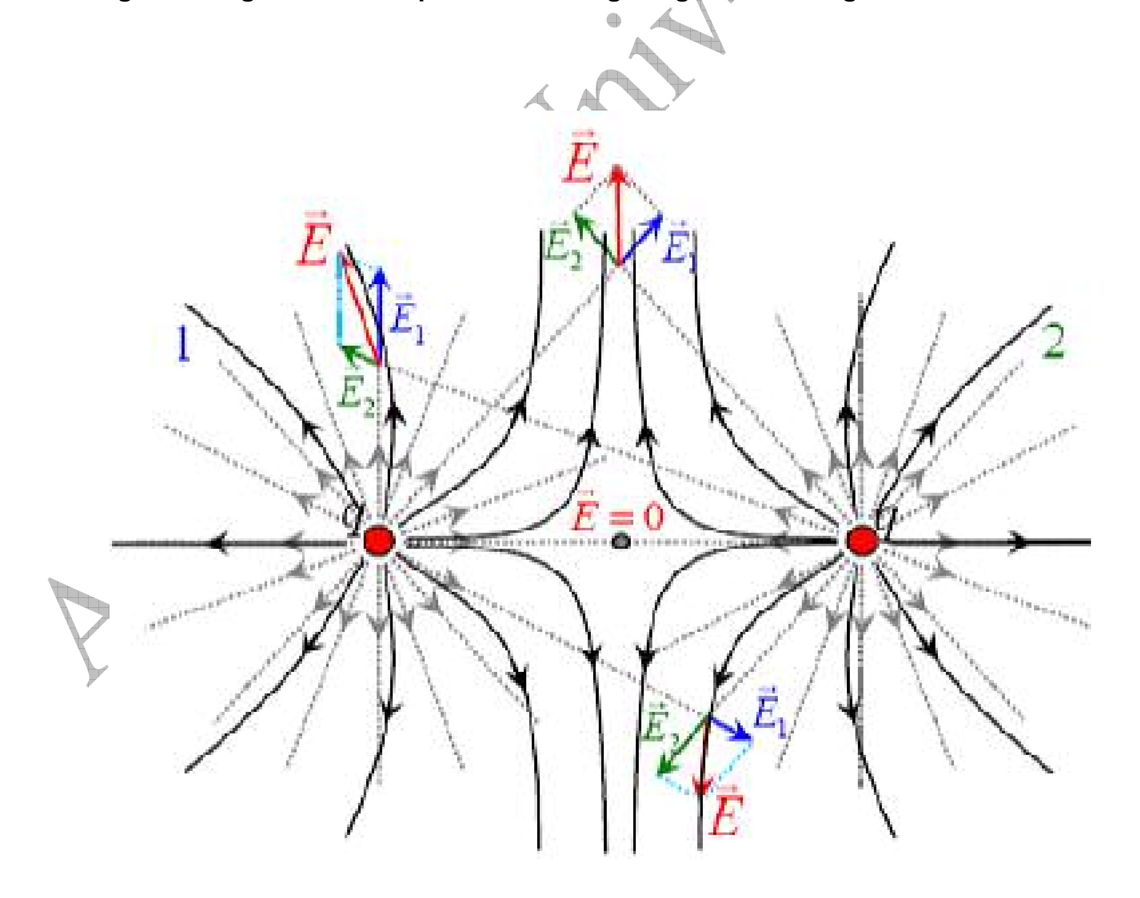


Fig 1.19 : Lignes de champ de deux charges égales

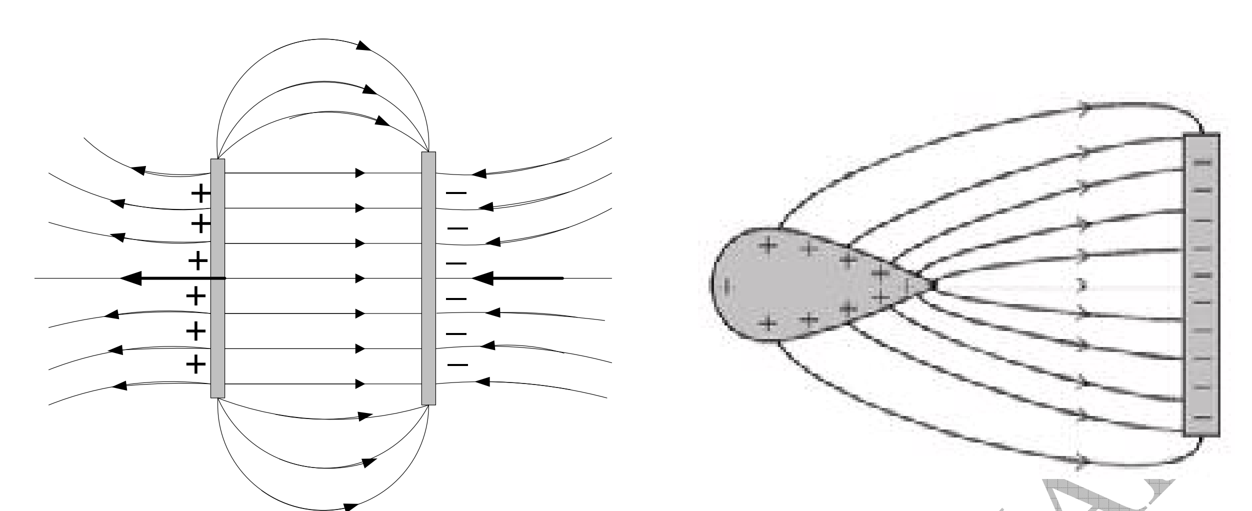


Fig 1.20 : Lignes de champ d'un champ électrique uniforme

Fig 1.21 : Champ électrique d'un conducteur pointu

6/ APPLICATIONS :

a/ Première application : Le champ électrostatique produit par un fil fin de longueur infinie et portant une charge linéique positive de densité λ constante.

On se propose de calculer le champ électrique statique $\vec{E}$ produit au point P par l'ensemble de la charge que porte le fil. Figure 1.22

Solution : le petit élément que l'on doit prendre en considération est un segment rectiligne de longueur dx, portant la charge élémentaire $dq = \lambda.dx$:

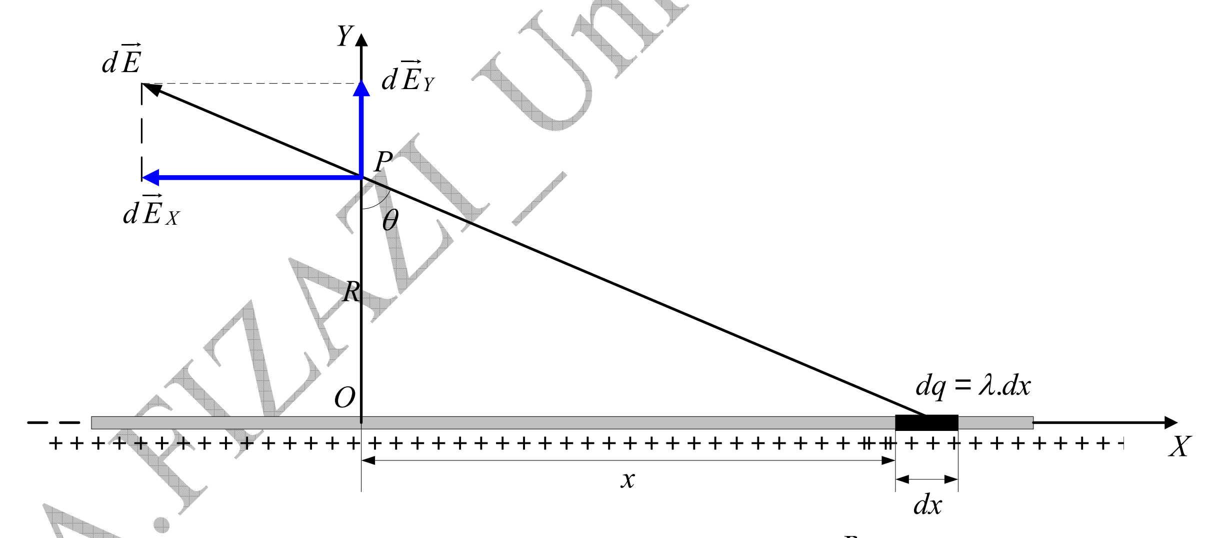


Fig 1.22 : Champ électrostatique produit par un fil chargé au point P

Le champ élémentaire $d\vec{E}$ produit par la charge dq est situé sur le prolongement du segment rectiligne de longueur et reliant P à dq.

En appliquant le relation 1.14 on obtient :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda.dx}{r^2}$$

Sachant que : $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$

Et d'après la figure 1.22, on a :

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\sin\theta$$
$$E_y = \int dE_y = \int dE.\cos\theta$$

Soit :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\sin\theta$$
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\cos\theta$$

On remarque que r, θ, x sont des variables, tandis que R est constant. On en déduit géométriquement que :

$$x = R.tg\theta \Rightarrow dx = R.d\theta.\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$r = \frac{R}{\cos\theta}$$

Suite à cela, on obtient :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R/\cos^2\theta).d\theta}{R^2/\cos^2\theta}.\sin\theta$$
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R}.\sin\theta.d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.[-\cos\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_x = 0}$$

Ce résultat $\left(\vec{E_x} = \vec{0}\right)$ était prévisible vu la symétrie du problème.

Quant à la composante normale elle est calculée de la même façon :

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{r^2}.\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(R/\cos^2\theta).d\theta}{R^2/\cos^2\theta}.\cos\theta$$
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{R}.\cos\theta.d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.[\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Rightarrow \boxed{E_y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{R}}$$

Finalement on obtient :

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E_y} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.\frac{\lambda}{R}\vec{j}}$$

La même méthode est conseillée s'il s'agit d'un anneau fin. On peut aussi s'aider de la deuxième application.

b/ Deuxième application : Le champ électrostatique produit par un disque fin et portant une charge surfacique positive de densité σ constante.

Un disque de centre O et de rayon R porte une charge uniforme de densité surfacique $\sigma \succ 0$. Soit OX l'axe perpendiculaire au disque en son centre O.

Calculer en fonction de x le champ $\vec{E}$ en tout point de l'axe $X'X$. (On étudie les trois cas : $x \succ 0$; $x \prec 0$; $x = 0$).

Solution : Soit P un point de l'axe OX tel que $OP = x$. Calculons le champ produit par la charge surfacique en ce point. Figure 1.23.

Le petit élément que nous devons prendre en considération est la couronne d'épaisseur d de surface dS et qui porte la charge élémentaire : $dq = \sigma.dS = \sigma.2\pi r.dr$

En appliquant la relation 1.14, on peut calculer le champ élémentaire $d\vec{E}$ crée par la charge dq :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{b^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\sigma.2\pi rdr}{b^2}$$

Sachant que : $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z$

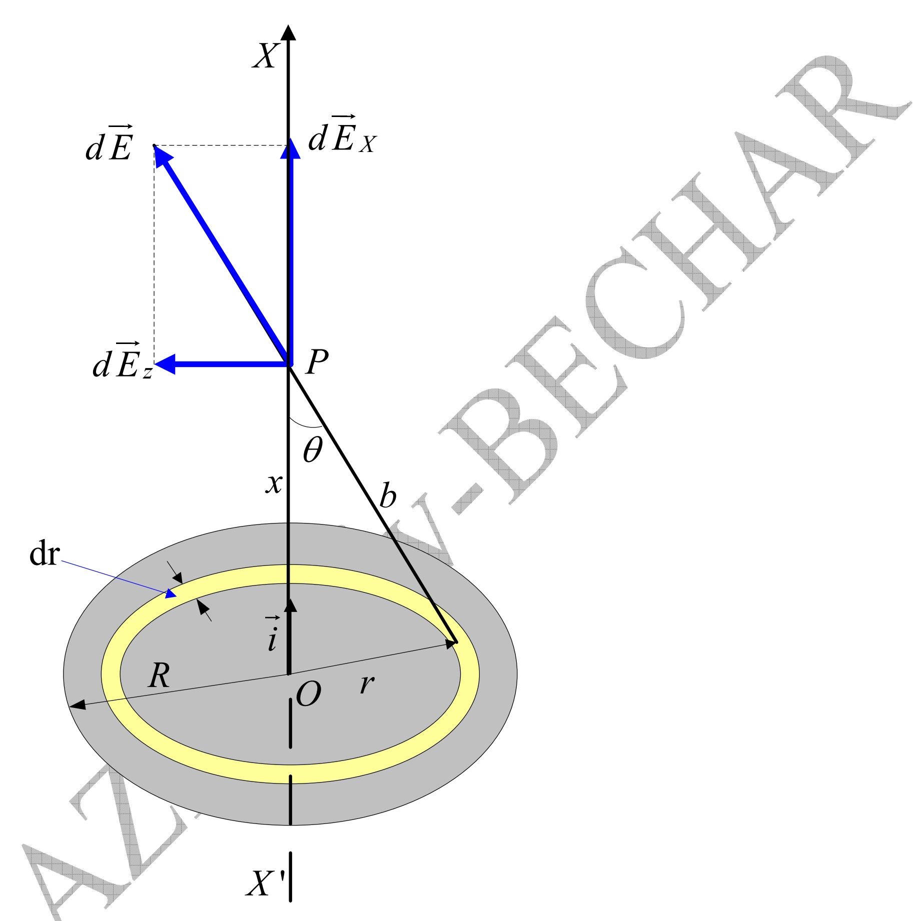


Fig 1.23 : Champ électrostatique crée par un disque chargé au point P

Pour obtenir le champ produit par tout le disque chargé, on intègre de 0 à R.
On voit que :

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\cos\theta$$

$$E_z = \int dE_z = \int dE.\sin\theta$$

Vu la symétrie du problème on a :

$$\boxed{\vec{E_z} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E_x}}$$

Laissons à l'étudiant le soin de vérifier que $\vec{E_z} = \vec{0}$, et passons au calcul de $\vec{E_x}$.

$$E_x = \frac{\sigma.2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{r.dr}{b^2}.\cos\theta$$

A partir de la figure, on a :

$$b^2 = x^2 + r^2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{b} \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

Suite à tous ces résultats on obtient :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int \frac{x.r.dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r.dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow E = \frac{\sigma .x}{2\varepsilon_0} . \left[\frac{-1}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R$$

A la fin on a :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} . \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + R^2)}} \right]}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_z \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] \vec{i}} \rightarrow (1)$$

Discussion :

$$x \succ 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \vec{i} \rightarrow (2)$$

$\vec{E}$ est dirigé suivant $\vec{i}$ et s'éloigne des charges positives.

$$x \prec 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \vec{i} \rightarrow (3)$$

$\vec{E}$ est dirigé suivant $\vec{i}$ mais de sen contraire, il s'éloigne des charges positives.

Pour obtenir l'expression de $\vec{E}$ pour $x = 0$, il faut chercher la limite de l'équation (1) quand $x \to 0$ ou tout simplement remplacer x par 0 dans l'équation (2). On trouve :

$$x = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{i}$$

c/ Troisième application : Le champ électrostatique produit par un plan infini portant une charge surfacique positive de densité σ constante.

Ici la surface élémentaire est un anneau de rayon d'épaisseur d et de centre O . figure1.24.

Cet anneau produit au point P un champ électrique vertical (les composantes élémentaires horizontales s'annulent deux à deux à cause de la symétrie).

Donc : $\vec{E}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_y$.

A l'étudiant de vérifier ce résultat.

A partir de la figure on remarque que : $dE_y = dE.\cos\theta$

L'anneau porte la charge élémentaire totale : $dq = dS.\sigma = 2\pi r.dr.\sigma$

Donc le champ élémentaire produit par la boucle au point P est :

$$dE = dE_y = K.\frac{dq}{b^2}.\cos\theta = K.\frac{2\pi r.dr.\sigma}{\left(R^2+r^2\right)}.\frac{R}{b}$$

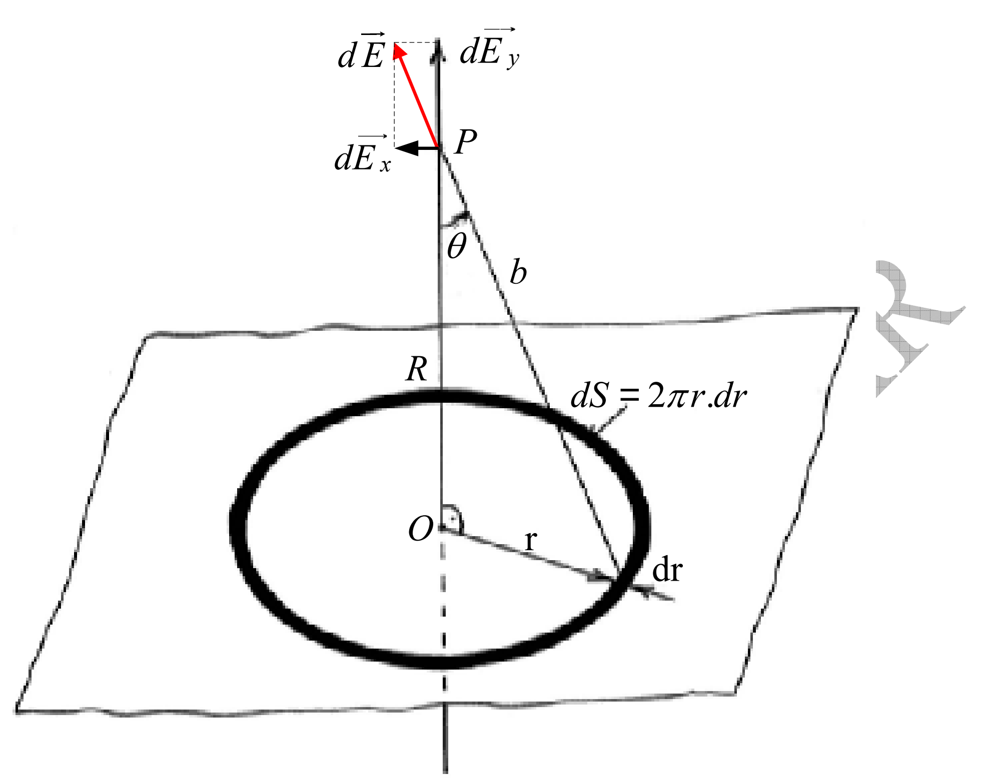


Fig 1.24: Champ d'un plan infini

Donc le champ électrique total produit par toute la surface du plan est :

$$E = \int_0^\infty K.\frac{2\pi r.dr.\sigma.R}{\left(R^2+r^2\right)^{3/2}} = K.2\pi\sigma.R\int_0^\infty \frac{r.dr}{\left(R^2+r^2\right)^{3/2}} \Rightarrow E = K.2\pi\sigma.R\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2}}\right]_0^\infty$$

A la fin :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Cela veut dire que le champ électrique est constant tout au long de l'axe Oy . Quelque soit la position du point P sur l'axe Oy , le champ électrique reste égal à lui même.

D/ POTENTIEL ELECTRIQUE (الكمون الكهربائي)

1/ CIRCULATION D'UN CHAMP DE VECTEURS (تجوّل حقل أشعة)

Supposons une particule quelconque se déplaçant de A à B en suivant la trajectoire curviligne, à l'intérieur d'un champ de vecteurs (comme par exemple le champ de pesanteur, le champ électrique, le champ magnétique, le champ de force…) et qu'on note par $\vec{V}$.

Définition 1 : On appelle intégrale curviligne du champ de vecteurs $\vec{V}$ du point A au point B le long de la trajectoire L l'expression :

$$\int_L \vec{V}.d\vec{l} = \int_A^B \vec{V}.d\vec{l} \qquad \textbf{(1.16)}$$

$d\vec{l}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

Remarque : Dans le cas général l'intégrale curviligne dépend du chemin suivi.

Définition 2 : Si le chemin ou la trajectoire est une courbe fermée, l'intégrale curviligne s'appelle circulation du champ de vecteurs, il s'écrit alors sous la forme :

$$\text{Circulation de } \vec{V} = \oint \vec{V}.d\vec{l} = \vec{V} \text{ تجـوّل} \qquad \textbf{(1.17)}$$

Appliquons maintenant dans ce qui suit ces deux définitions au champ électrique $\vec{E}$.

2/ CIRCULATION DU CHAMP ELECTRIQUE (تجوّل الحقل الكهربائي)

Considérons une région de l'espace où règne un champ électrique. Toute particule chargée q_0 présente dans ce champ est soumise à une force électrique :

$$\vec{F} = q_0.\vec{E} \qquad \textbf{(1.18)}$$

($\vec{F}$ a le même sens que $\vec{E}$ si $q_0 \succ 0$)

Si cette particule n'est pas retenue, elle va se déplacer dans le sens de $\vec{F}$. Supposons un expérimentateur qui veut déplacer cette charge q_0 très lentement suivant un chemin déterminé. Pour cela, il faut d'abord appliquer sur la particule une force directement opposée à la force $\vec{F}$ pour annuler son action, puis appliquer une force supplémentaire dans le sens choisi du mouvement. A l'extrême limite, et pour obtenir le déplacement infiniment lent, nous considérons qu'il suffit d'appliquer une force sur q_0 pour compenser la force électrique : on doit donc appliquer la force $\vec{F}_d = -q_0.\vec{E}$.

Pour un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, le travail élémentaire correspondant est :

$$dW = \vec{F}_d.d\vec{l} \Rightarrow dW = -q_0\vec{E}.d\vec{l}$$

Si on veut déplacer la charge q_0 suivant un chemin quelconque AB , il faut fournir un travail W_{AB} :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_d.d\vec{l} \;\Rightarrow\; W_{AB} = -\int_A^B q_0.\vec{E}.d\vec{l} \;\Rightarrow\; W_{AB} = -q_0\int_A^B \vec{E}.d\vec{l} \qquad \textbf{(1.19)}$$

Définition : L'intégrale $\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$ s'appelle circulation du champ électrique sur tout le long de la courbe de A jusqu'à B.

Remarque : cette circulation est **conservative**, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du chemin suivi. La circulation du champ électrique suivant une courbe fermée (retour au point de départ) est nulle comme nous le verrons un peu plus loin.

Cas particulier : Si $|q_0| = 1C$, dans ce cas le travail $W = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$ s'appelle la force électromotrice (القوة المحركة الكهربائية) dont la définition est donc :

Définition : La force électromotrice est égale au travail effectué pour déplacer la charge unité ($q = 1C$) le long de la courbe.

Précision : Le mot « force » est trompeur, car nous parlons d'énergie. C'est l'habitude qui nous a fait hériter le mot « force » au lieu d'énergie.

3/ POTENTIEL ELECTRIQUE (الكمون الكهربائي) :

Dans l'exemple schématisé sur la figure 1.25 on a :

$$\underset{C_1 \text{ المسلك}}{\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}} = \underset{C_2 \text{ المسلك}}{\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}} = \underset{C_3 \text{ المسلك}}{\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}} \qquad \textbf{(1.20)}$$

Cela veut dire que le travail nécessaire pour déplacer la charge du point A au point B est indépendant du chemin suivi. Lorsque la circulation du champ le long de la courbe ne dépend pas du chemin suivi, mais dépend uniquement du point de départ et du point d'arrivée, on dit dans ce cas que ce champ est conservateur. Tel est le cas du champ électrostatique.

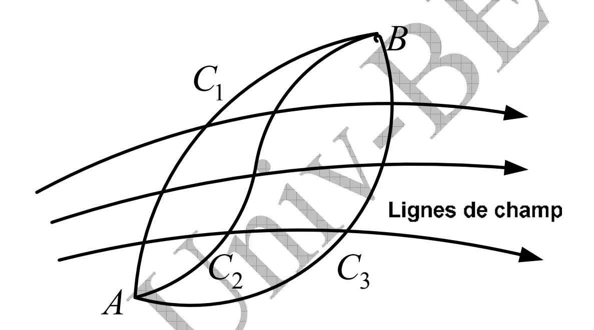


Fig 1.25 : Travail indépendant du chemin suivi par la charge

Dans l'expression 1.19, on pose :

$$\boxed{dV = -\vec{E}.\vec{dl}} \qquad \textbf{(1.21)}$$

V est une grandeur scalaire appelée **potentiel électrique**. on dit dans ce cas que le champ électrique $\vec{E}$ **dérive du potentiel** V.

L'énergie nécessaire pour déplacer la charge q_0 entre les points B et A est donc :

$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = q_0 \int_A^B dV = q_0 \left| V \right|_A^B = \left(V_B - V_A \right).q_0 \qquad \textbf{(1.22)}$$

La grandeur $V_B - V_A$ est appelée **tension** ou **différence de potentiel** entre les points B et A, on la note par U_{BA}, telle que :

$$U_{BA} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \qquad \textbf{(1.23)}$$

Cela nous mène à la définition de la différence de potentiel :

Définition : La différence de potentiel ($U_{BA} = V_B - V_A$) est égale au travail fourni à la charge unité (sa valeur est égale à l'unité) pour la transporter du point A au point B.

4/ CIRCULATION DU CHAMP ELECTRIQUE LE LONG D'UNE COURBE FERMEE (تجوّل الحقل الكهربائي على طول منحنى مغلق) :

Si la charge suit une courbe fermée, comment peut-on démontrer que la circulation de $\vec{E}$ est nulle ?

Déterminons sur la courbe fermée L deux points A et B (figure 1.26), puis calculons la circulation :

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}.d\vec{l} \qquad \textbf{(1.24)}$$

$$\oint_L \vec{E}.d\vec{l} = (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0 \qquad \textbf{(1.25)}$$

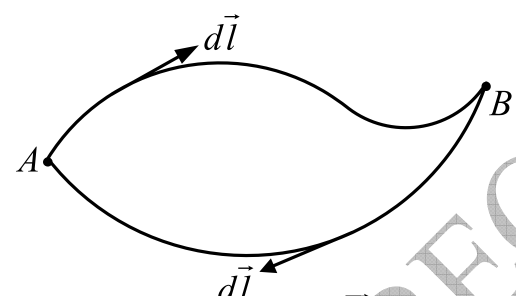


Fig 1.26 : Circulation de $\vec{E}$ suivant une courbe fermée

Conclusion : En électrostatique, la circulation du champ électrique le long de toute courbe fermée est nulle.

$$\boxed{\oint_L \vec{E}.d\vec{l} = 0} \qquad \textbf{(1.26)}$$

Ce résultat est toujours vérifié, chaque fois que le champ dérive d'un potentiel.

5/ LE POTENTIEL ELECTRIQUE PRODUIT PAR UNE CHARGE PONCTUELLE q (الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية) :

On a vu que le champ $\vec{E}$ produit par une charge q est radial (il passe par la charge q),

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2} \qquad \textbf{(1.27)}$$

Pour obtenir le potentiel V, on calcule d'abord la circulation du champ $\vec{E}$ le long d'un rayon quelconque :

On a :

$$d\vec{l} \parallel d\vec{r}$$

Et puisque :

$$d\vec{r} \parallel \vec{E}$$

Donc :

$$\left.\begin{array}{l} dV = -\left(\vec{E}.d\vec{r}\right) \\ dV = -E.dr \end{array}\right| \Rightarrow dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}dr \qquad \textbf{(1.28)}$$

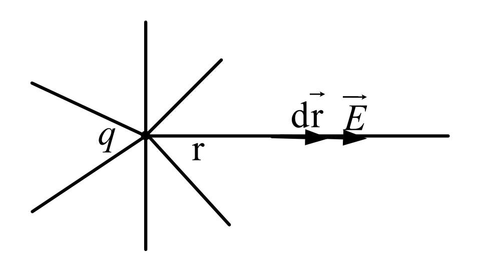


Fig 1.27: circulation du champ suivant le rayon

D'où :

$$V(r) = \int dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} + C^{te}} \qquad \textbf{(1.29)}$$

En supposant $V = 0$ quand $r = \infty$, on aura $C^{te} = 0$. A la fin on obtient :

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}} \qquad \textbf{(1.30)}$$

Le potentiel est constant sur des sphères de rayon r_i dont leur centre est la charge q. On dit que ces sphères constituent des surfaces équipotentielles (سطوح متساوية الكمون).

On démontre que la différence de potentiel entre deux sphères de rayons respectifs r_1 et r_2 est donné par la relation :

$$\boxed{V_1 - V_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]} \qquad \textbf{(1.31)}$$

6/ CALCUL DU CHAMP $\vec{E}$ A PARTIR DE V :

On a vu que $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$. En considérant le repère cartésien O_{xyz}, et en supposant que le potentiel V et le champ $\vec{E}$ sont connus au point A de l'espace, on peut calculer le potentiel $V_A + dV$ en tout point relié à A par le vecteur élémentaire $\vec{dl}$. Figure 1.28.

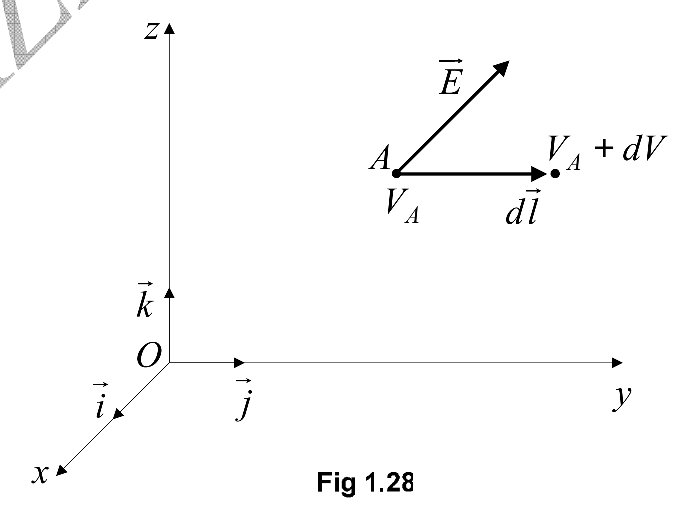


Fig 1.28

Cas particulier : On suppose qu'on s'éloigne de A dans le sens de x (y et z restant constantes). Donc $\vec{dl} = \vec{i}dx$, d'où $dV = -\left(\vec{E}.\vec{i}\right).dx$, soit :

$$\boxed{dV = -E_x . dx} \qquad \textbf{(1.32)}$$

On arrive pour ce cas particulier à $E_x = -\dfrac{dV}{dx}$ où dV est la variation de V quand y et z restent constantes et seule x varie.

Cette condition sur les coordonnées coïncide avec la notion des **dérivées partielles**. Donc on peut écrire :

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}} \qquad \textbf{(1.33)}$$

En répétant le même raisonnement pour y et z on trouve :

$$\boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}} \qquad \textbf{(1.34)}$$

$$\boxed{E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}} \qquad \textbf{(1.35)}$$

Puisque on est dans le repère O_{xyz}, on a :

$$\vec{E} = \vec{E_x} + \vec{E_y} + \vec{E_z} \Rightarrow \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

Donc :

$$\vec{E} = \left[-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right] \Rightarrow \vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right] \qquad \textbf{(1.36)}$$

On reconnaît dans cette expression l'**opérateur gradient**, donc :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \right] \qquad \textbf{(1.37)}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V} \qquad \textbf{(1.38)}$$

On comprend très bien maintenant l'expression « **le champ électrique** $\vec{E}$ **dérive du potentiel** V ».

L'expression du champ $\vec{E}$ en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial \rho}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z} \right] \qquad \textbf{(1.39)}$$

L'expression du champ $\vec{E}$ en coordonnées sphériques est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} \right] \qquad \textbf{(1.40)}$$

Exemple 1.5 :

1/ En déduire le vecteur champ électrique de l'expression du potentiel suivante : $V(x,y,z) = 3x^2y + z^2$.

2/Calculer le module du champ $\vec{E}$ au point $A(1,2,-1)$.

Réponse :

1/ Il suffit de dériver $V(x,y,z)$ en utilisant la relation1.37 pour trouver :

$$\vec{E} = -\left[6xy\vec{i} + 3x^2\vec{j} + 2z\vec{k}\right]$$

2/ Le module du champ au point $A(1,2,-1)$ est :

$$\vec{E} = -12\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow E = \sqrt{12^2 + 3^2 + 2^2}$$

$$E = \sqrt{157} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{E} \approx 12{,}53\mathrm{V/m}}$$

7/ LE POTENTIEL CREE PAR PLUSIEURS CHARGES PONCTUELLES DISTINCTES :

Le principe de superposition est là aussi valable. Puisque le potentiel V est une grandeur scalaire, le potentiel $V(M)$ créé par plusieurs charges concentrées au point M est donné par l'expression algébrique :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \textbf{(1.41)}$$

Où $_i$ est la distance entre q_i et le point M . La charge q_i peut être positive ou négative, c'est pour cela qu'il faut la prendre avec son signe.

8/ LE POTENTIEL ELECTRIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE LA CHARGE :

Dans ce cas, on doit procéder à une intégration après avoir choisi une charge élémentaire correspondante, avec le même procédé que celui du champ électrique pour un pareil cas.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} \qquad \textbf{(1.42)}$$

Conseil : Dans le cas général, il est préférable de calculer le potentiel en premier lieu, puis en déduire le champ électrique par dérivation.

Exemple 1.6 :

Un anneau, de centre O et de rayon R, porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique $\lambda \succ 0$.

1/ Calculer le potentiel crée au point M de l'axe Oy et situé à la distance y de O .

2/ En déduire le vecteur champ au point M .

Réponse :

Pour le point donné M , les grandeurs r, y, R sont constantes. Partant de la figure 1.29, et en posant $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ on peut écrire :

$$dV = K\frac{dq}{r} \quad \Rightarrow \quad \int dV = \frac{K}{r}\int dq \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V} = \frac{\mathrm{Kq}}{r} + C^{te}$$

Sur la figure on peut voir que : $r = \sqrt{R^2 + y^2}$

Après le remplacement de K et $q = \lambda.2\pi R$ on arrive à l'expression :

$$V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}.\frac{R}{\sqrt{R^2 + y^2}} + C^{te}$$

Reste maintenant à déterminer le module E . Pour cela il suffit de dériver l'expression de V par rapport à y en exploitant la relation 1.34 :

$$E = -\frac{dV}{dy} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda . R}{2\varepsilon_0} . \frac{y}{\left(R^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

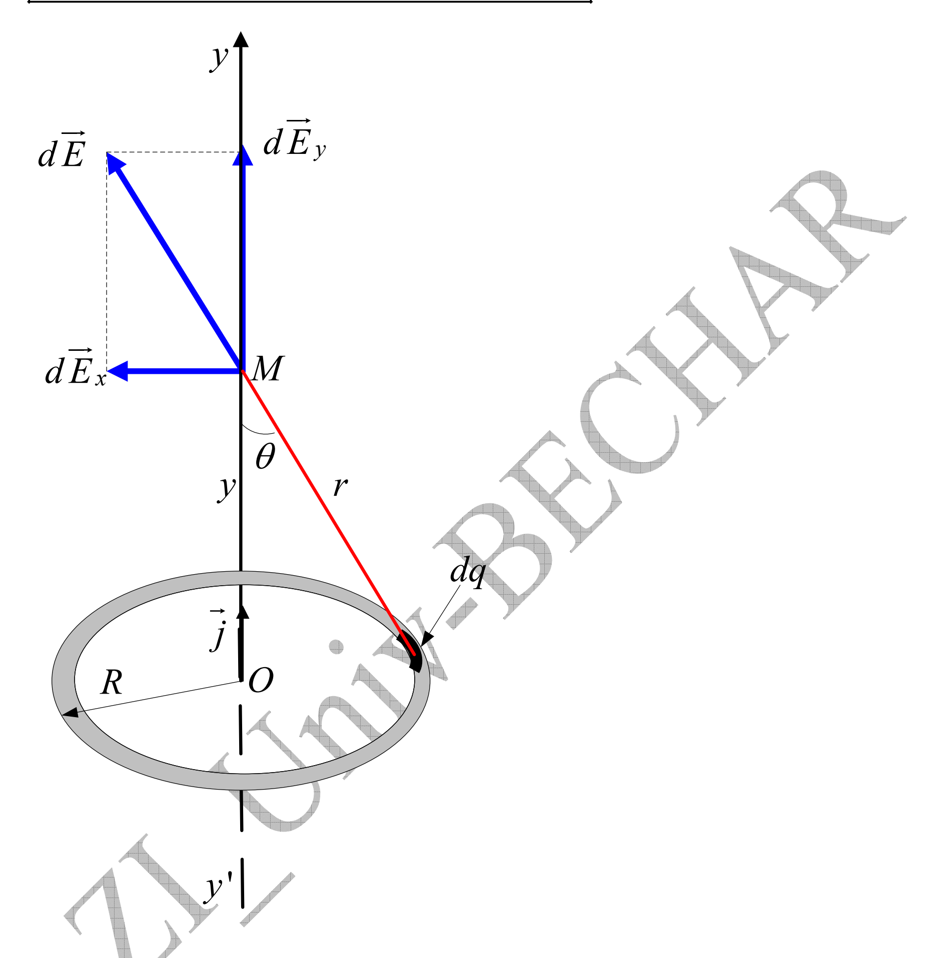


Fig 1.29 : Champ électrostatique crée par un anneau chargé au point M

Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ s'écrit alors :

$$\vec{E} = \left[\frac{\lambda . R}{2\varepsilon_0} . \frac{y}{\left(R^2 + y^2\right)^{3/2}} \right] \vec{j}$$

C/ FLUX ELECTROSTATIQUE ET THEOREME DE GAUSS
(التدفق الكهروساكن: نظرية غوص):

1/ Le flux électrique :

- **Définition :** On appelle flux du champ électrique à travers une surface la grandeur :

$$\Phi = \int \vec{E} . d\vec{S} \qquad \textbf{(1.43)}$$

$d\vec{S}$: Vecteur de la surface élémentaire, il est toujours normale à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume limité par la surface.

Si θ est l'angle compris entre $\vec{E}$ et $d\vec{S}$, on aura :

$$\boxed{\Phi = \oint_S E.dS.\cos\theta} \qquad \textbf{(1.44)}$$

Fig 1.30 : Flux à travers une surface élémentaire

L'unité du flux électrique est le **Weber** (Wb), son équation aux dimensions est :

$$[\Phi] = L^3.T^{-3}.A^{-1}$$

2/ THEOREME DE GAUSS :

Le théorème de Gauss exprime la relation entre le flux électrique à travers une surface fermée et le nombre de charges présentes à l'intérieur du volume entouré par cette surface.

Par exemple : soit q une charge ponctuelle positive, elle produit un champ électrique radial dirigé vers l'extérieur, de module $E(r) = K.\frac{q}{r^2}$.

On choisi comme surface fermée une sphère dont le centre est la charge q .Figure 1.31.

Puisque nous sommes dans le cas d'une sphère, tous les vecteurs surface élémentaire $d\vec{S}$ sont radiaux, ils ont donc la même direction que $\vec{E}$, d'où $\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$.

Le flux électrique élémentaire à travers la surface élémentaire $d\vec{S}$ est :

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = E.dS \qquad \textbf{(1.45)}$$

Par intégration on obtient :

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oint_S K.\frac{q}{r^2}.dS \qquad \textbf{(1.46)}$$

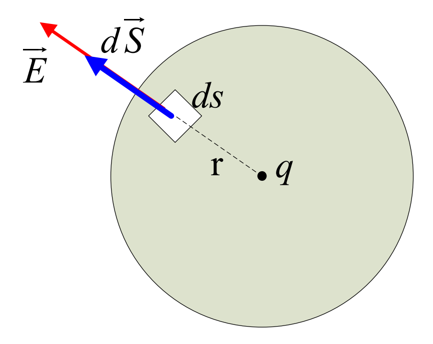


Fig 1.31 : Charge ponctuelle dans une sphère

Puisque le rayon de la sphère est constant on a :

$$\Phi = K.\frac{q}{r^2}\oint_S dS \qquad \textbf{(1.47)}$$

Rappelons-nous que la surface d'une sphère est :

$$\oint_S dS = S = 4\pi r^2 \qquad \textbf{(1.48)}$$

Après remplacement on obtient :

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(1.49)}$$

Résultat : Le flux du champ magnétique sortant de la sphère $(\forall r)$ au centre de laquelle se trouve une charge ponctuelle positive $(q \succ 0)$ est égal à $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

Dans le cas où $q \prec 0$, le champ électrique $\vec{E}$ est dirigé vers le centre de la sphère et le flux électrique Φ est négatif car $\left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = \pi \Rightarrow \cos\pi = -1$.

Généralisation :

Le résultat obtenu par le calcul pour une seule charge est vérifié dans le cas général.

Si on considère une surface fermée quelconque renfermant n charges $q_n + ...q_2 + q_1$ (quelque soient leur signes), on démontre dans ce cas que :

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i.\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}} \quad [\text{Wb}] \qquad \textbf{(1.50)}$$

C'est là le **théorème de Gauss** :

Enoncé : Le **flux** d'un champ électrique à travers une surface fermée est égal à **la somme algébrique** des charges se trouvant à l'**intérieur** du volume limité par cette surface, divisé par la permittivité du vide ε_0 .

Intérêt de ce théorème : Ce théorème facilite et simplifie le calcul du champ électrique produit par une distribution simple de charges.

Dans ce qui suit, nous allons aborder quelques exemples pour préciser la méthode d'application du théorème de Gauss.

3/ APPLICATION DU THEOREME DE GAUSS :

a/ Le champ crée par une charge ponctuelle :

On considère la charge q comme centre d'une sphère de rayon .

Donc le champ électrique $\vec{E}$ est radial et sortant, $\cos 0 = 1$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

La surface de la sphère est $S = 4\pi r^2$, d'où :

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 . S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{1}{r^2} \qquad \textbf{(1.51)}$$

b/ Le champ électrique produit par une tige de longueur infinie uniformément chargée :

La surface de Gauss qui convient à ce cas est celle d'un cylindre de longueur l, et dont l'axe coïncide avec la tige.

Il y a trois surfaces : la surface de base S_1 , la surface de base S_2 , et la surface latérale S_L :

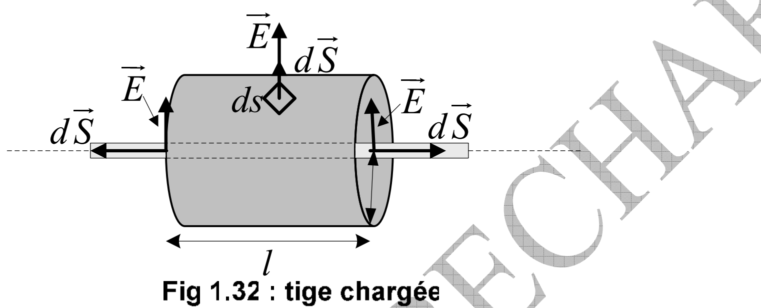


Fig 1.32 : tige chargée

Le flux à travers toutes les surfaces qui constituent le cylindre de Gauss est la somme des flux à travers chaque surface, soit $\Phi = \sum \Phi_i$:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \underbrace{\oint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \underbrace{\oint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S}}_{0} + \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} \qquad \textbf{(1.52)}$$

Sur les surfaces des bases (S_1) et (S_2) , le champ est perpendiculaire au vecteur $d\vec{S}$, donc il n'y a aucun flux qui traverse ces deux surfaces $(\cos\pi/2 = 0)$. Mais, par contre sur la surface latérale (S_L), les vecteurs $d\vec{S}$ sont tous radiaux comme $\vec{E}$ $(\cos 0 = 1)$. D'où l'on obtient :

$$\Phi = \oint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} = E.S_L = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(1.53)}$$

Sachant que $Q_i = \lambda.l$ et $S_L = 2\pi Rl$, donc :

$$E.2\pi R.l = \frac{\lambda.l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}} \qquad \textbf{(1.54)}$$

c/ Champ électrique produit par une sphère pleine chargée uniformément :

La surface de Gauss qui convient ici est une sphère de rayon . En appliquant le théorème de Gauss on écrit :

$$\Phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(1.55)}$$

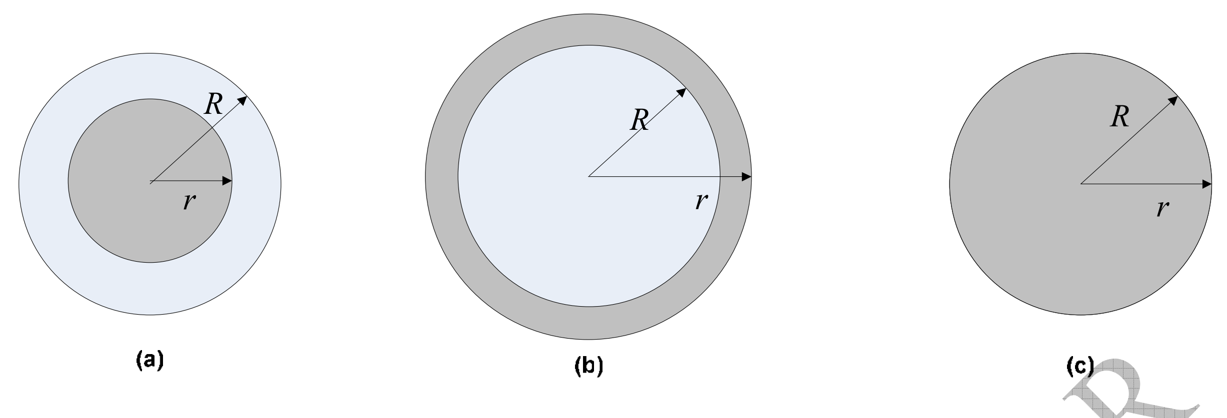


Fig 1.33 : Sphère pleine chargée

Discussion :

- $R \succ$: (la figure 1.33-a), seule une partie de la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.r} \qquad \textbf{(1.56)}$$

E est proportionnel à la distance .

- $R \prec$: (la figure 1.33-b), toute la charge portée par la sphère se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad \textbf{(1.57)}$$

E est inversement proportionnel au carré de la distance . La sphère se comporte comme une charge ponctuelle.

- $R =$: (Figure 1.33-c) la surface de Gauss coïncide avec la surface de la sphère :

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.R} \qquad \textbf{(1.58)}$$

Le champ électrique sur la surface de la sphère est constant.

d/ Champ électrique produit par un plan infini chargé uniformément :

On choisit comme surface de Gauss un cylindre perpendiculaire au plan. Là aussi on a trois surfaces :

Le flux à travers la base de surface S_1 : $\Phi_1 = E.S_1$,

Le flux à travers la base de surface S_2 : $\Phi_2 = E.S_2$,

Le flux à travers la base latérale S_L est nul : $\left(d\vec{S} \perp d\vec{E}\right)$,

Faire attention à $\vec{E_1} = -\vec{E_2}$ mais $E.S_1 = E.S_2$, donc :

$$\Phi = 2E.S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

A la fin, on remarque que le champ électrique est uniforme quelque soit la distance entre le point considéré et le plan :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(1.59)}$$

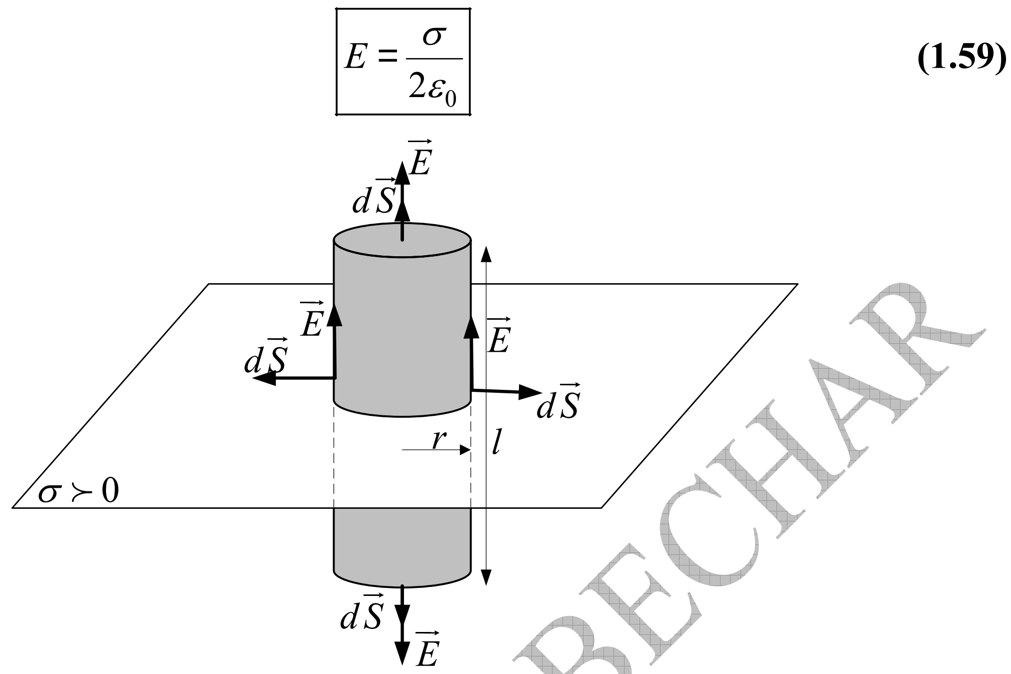


Fig 1.34 : Plan infini chargé

Conclusion : De ces exemples on remarque que les résultats sont parfaitement identiques à ceux déjà trouvés au paragraphe C, mais avec beaucoup plus de facilité, et c'est là tout l'intérêt du théorème de Gauss.

4/ FORME DIFFERENTIELLE DU THEOREME DE GAUSS

(الشكل التفاضلي لنظرية غوص) :

Les coordonnées cartésiennes du champ $\vec{E}$ sont E_x , E_y , E_z . Calculons le flux sortant du cube élémentaire de volume $dv = dx.dy.dz$. (Figure 1.35)

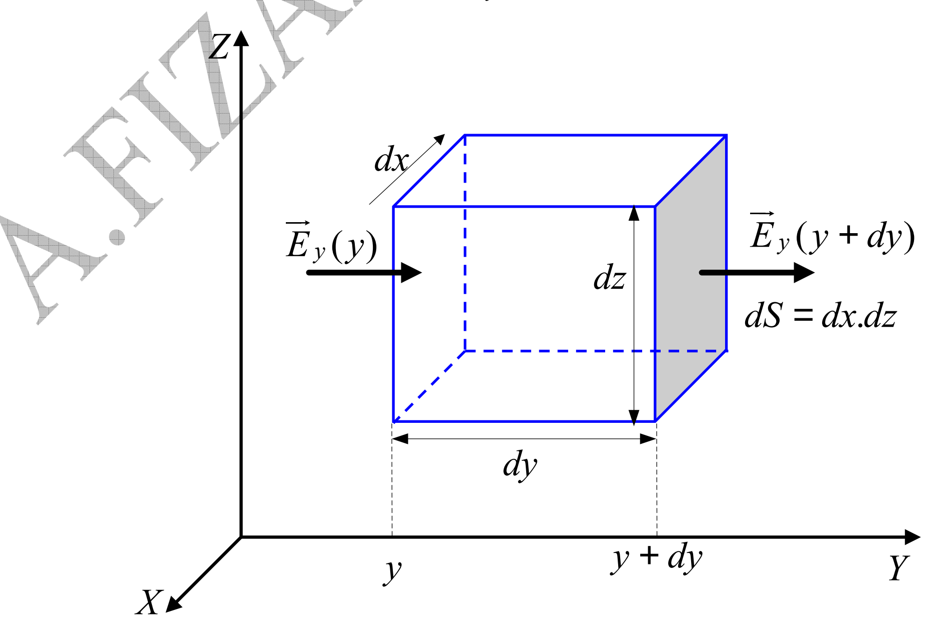


Fig 1.35 : Flux à travers un volume élémentaire

Le flux résultant de la composante E_y est:

- Nul à travers les faces : de devant, de derrière, du bas et du haut, car le vecteur champ est perpendiculaire au vecteur surface de chaque face.
- Reste à calculer le flux à travers les faces latérales d'aire $dS = dx.dz$.

Le flux entrant en y est négatif car le champ est dirigé vers l'intérieur du volume en sens contraire à celui de $\left(\left(\overrightarrow{E_y},\overrightarrow{dS}\right)=\pi\right)$, il est égal à :

$$-E_y(y).dx.dz$$

Le flux sortant de $y+dy$ est positif et égal à : $+E_y(y+dy).dx.dz$

De tout cela on obtient le flux à travers les deux faces latérales :

$$\Phi_{dSy} = \left(E_y(y+dy) - E_y(y)\right)dx.dz$$

Puisque la distance dy entre les surfaces est très petite, mathématiquement nous pouvons écrire :

$$E_y(y+dy) - E_y(y) = \Delta E_y = dE_y = \left(E_y\right)'.dy = \frac{\partial E_y}{\partial y}dy$$

Le résultat de tout cela :

$$d\Phi_{dSy} = \left(E_y(y+dy) - E_y(y)\right)dx.dz = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dx.dy.dz$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right)dx.dy.dz = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y}\right).dv$$

Puisque les résultats du flux sont identiques pour les quatre faces restantes, le flux total du volume élémentaire dv est égal à :

$$d\Phi_E = d\Phi_{dS_x} + d\Phi_{dS_y} + d\Phi_{dS_z}$$

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dx.dy.dz = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).dv$$

Si dq est la charge du volume dv , on a d'après le théorème de Gauss :

$$d\Phi_{\vec{E}} = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]dv = \frac{dq}{\varepsilon_0}$$

Si ρ est la densité de charge volumique, on a alors $dq = \rho.dv$, et donc :

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(1.60)}$$

On reconnaît dans cette expression le gradient de $\vec{E}$:

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(1.61)}$$

Cette dernière relation est l'expression du théorème de Gauss sous sa forme différentielle.

Quelle serait donc l'expression du potentiel électrique ?

On sait que : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

C'est-à-dire : $E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ $\quad E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$ $\quad E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$

Donc : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial V}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial V}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(-\dfrac{\partial V}{\partial z}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Finalement on arrive à :

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(1.62)}$$

Cette relation porte le nom de « **équation de Poisson** », elle permet le calcul de V si on connaît la répartition de la charge ou l'inverse.

Exemple 1.7 : Dans une région de l'espace règne un champ électrique de la forme : $\vec{E} = x.\vec{i} + 2y.\vec{j} + 3\vec{k}$

Trouver l'expression de la densité volumique de la charge.

Réponse : L'application de l'équation 1.61, nous donne :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right]$$

$$\rho = \varepsilon_0 [1 + 2 + 0] \Rightarrow \boxed{\rho = 3\varepsilon_0}$$

Exemple 1.8 : On donne l'expression du potentiel électrique :

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(x^2 + y^2 - z^2\right)$$

En déduire l'expression de la densité de la charge.

Réponse : De l'équation de Poisson on tire la densité ρ de la charge :

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}[2 + 2 - 2] = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{-q}{2\pi.a^3}}$$

Quand est-il s'il n'y avait aucune charge ?

Cela veut dire que :

$$\rho = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0} \qquad \textbf{(1.63)}$$

Cette expression est connue sous le nom de « **équation de Laplace** », elle est surtout utilisée en mécanique des fluides. Dans cette équation apparaît un opérateur appelé « **le laplacien** » qui est :

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} \qquad \textbf{(1.64)}$$

4/ NOTION DE L'ANGLE SOLIDE(مفهوم الزاوية الصلبة) :

En géométrie plane, on s'intéresse dans les figures à l'angle plan. Quand il s'agit de géométrie spatiale on parle d'angle solide. Par exemple, dans l'obscurité les rayon lumineux issus d'une source lumineuse ponctuelle sont caractérisés par deux grandeurs : la direction (qui est une droite), et l'angle maximal de propagation du faisceau lumineux autour de cette droite (un cône). Dans ce dernier cas, l'espace occupé par le faisceau lumineux s'appelle **angle solide**. Figure 1.36

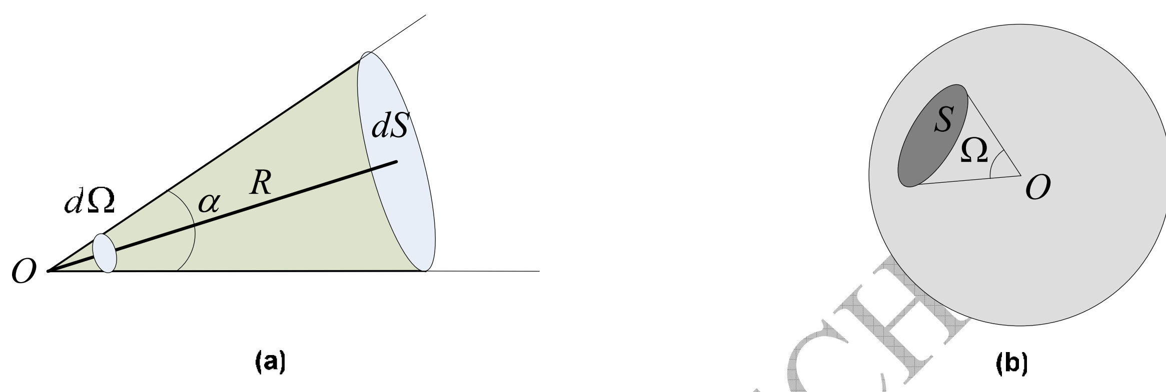


Fig 1.36 : Angle solide

Définition : L'angle solide élémentaire est l'espace contenu dans une surface conique élémentaire dS située à la distance R du sommet du cône, on le calcule par la formule :

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{R^2}} \qquad \textbf{(1.65)}$$

L'angle solide est toujours positif et indépendant de R . Son unité est le stéradian (sr).

Pour déterminer la valeur de l'angle solide Ω, on dessine un cône de centre O et de rayon R. La surface que coupe le cône est S (figure 1.36-b). La valeur de l'angle solide est donc :

$$\boxed{\Omega = \frac{S}{R^2}} \qquad \textbf{(1.66)}$$

En coordonnées sphériques, et en considérant R constante, la surface élémentaire est égale à :

$$dS = R^2 \sin\theta.d\theta.d\varphi \qquad \textbf{(1.67)}$$

Donc, l'angle solide élémentaire s'écrit :

$$d\Omega = \sin\theta.d\theta.d\varphi \qquad \textbf{(1.68)}$$

En intégrant on obtient l'angle solide entourant un cône d'angle au sommet α :

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi.\int_0^{\alpha} \sin\theta.d\theta = 2\pi\left(1-\cos\alpha\right) \qquad \textbf{(1.69)}$$

$$\boxed{\Omega = 2\pi\left(1-\cos\alpha\right)} \qquad \textbf{(1.70)}$$

❖ **Discussion :**

Premier cas : $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\Omega = 2\pi \ sr}$, correspond à la moitié de l'espace constitué par l'angle $\alpha = \pi/2$.

Deuxième cas : $\alpha = \pi \Rightarrow \boxed{\Omega = 4\pi\ sr}$, correspond à tout l'espace autour d'un point. C'est la valeur extrême pour un angle solide.

Cas général :

- Si le vecteur surface élémentaire est parallèle à la droite OP (figure 1.37-a), $\cos\theta = 1$, et par conséquent l'angle solide est égal à :

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{R^2}} \quad \textbf{(1.71)}$$

- Si le vecteur surface élémentaire fait l'angle θ avec la droite OP (figure 1.37-b), a), l'angle solide élémentaire est égal à :

$$\boxed{d\Omega = \frac{dS.\cos\theta}{R^2}} \quad \textbf{(1.72)}$$

C'est cette dernière expression qu'il faut retenir pour le calcul de l'angle solide dans le cas général.

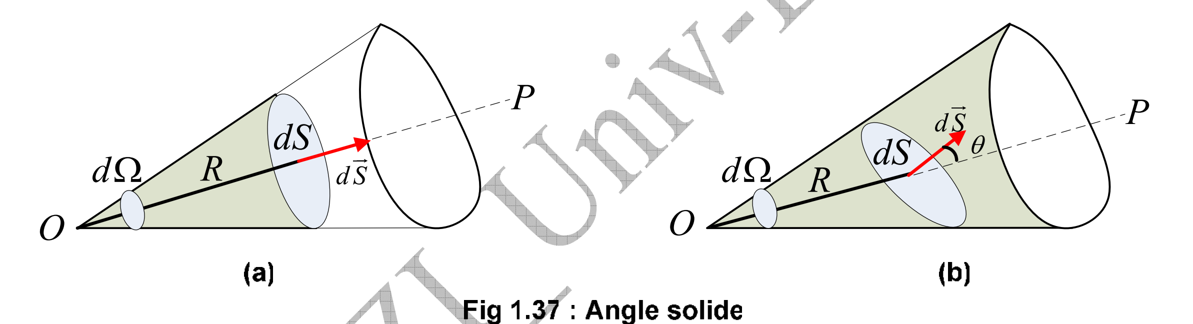


Fig 1.37 : Angle solide

❖ **La relation entre l'angle solide et le flux électrique :**

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q à une distance de la charge est $E = K\dfrac{q}{r^2}$.

Le flux élémentaire $d\Phi$ à travers une surface élémentaire dS située à la distance de la charge q est :

$$d\Phi = E.dS = K.q\frac{dS}{r^2} \quad \textbf{(1.73)}$$

$$\boxed{d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega} \quad \textbf{(1.74)}$$

Par intégration on obtient le flux total à travers toute la surface S :

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega} \quad \textbf{(1.75)}$$

Le flux électrique produit par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque est égal au produit de $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ par l'angle solide Ω sous lequel on voit la surface à partir de la charge.

Si la surface entourant la charge q est fermée, l'angle solide est 4π , et le flux est égal à $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

Si la surface entourant la charge q est fermée mais qu'elle n'entoure pas la charge, l'angle solide est nul, et le flux lui-même est nul.

F/ DIPOLE ELECTRIQUE(ثنائي القطب الكهربائي) :

- **Définition** : un dipôle électrique est l'ensemble de deux charges égales ,de signes contraires et séparées par une très petite distance.

La figure 1.18, montre les lignes de champ du dipôle électrique.

- **Définition** : Le moment dipolaire (العزم الكهربائي) d'un dipôle est un vecteur libre $\vec{p}$, il est égal au produit de la valeur de la charge q par le vecteur déplacement $\vec{a}$ de la charge, dirigé de la charge positive vers la charge négative (figure 1.38).

$$\boxed{\vec{p} = q.\vec{a}} \qquad \textbf{(1.76)}$$

- **Potentiel électrique produit par un dipôle électrique :**

On se propose de calculer le potentiel électrique produit par les deux charges $+q$ et $-q$, au point P situé à la distance $_1$ de la charge $+q$ et à la distance $_2$ de la charge $-q$. La distance a est très petite devant les distances $_1$ et $_2$.

Voir Figure 1.38 .

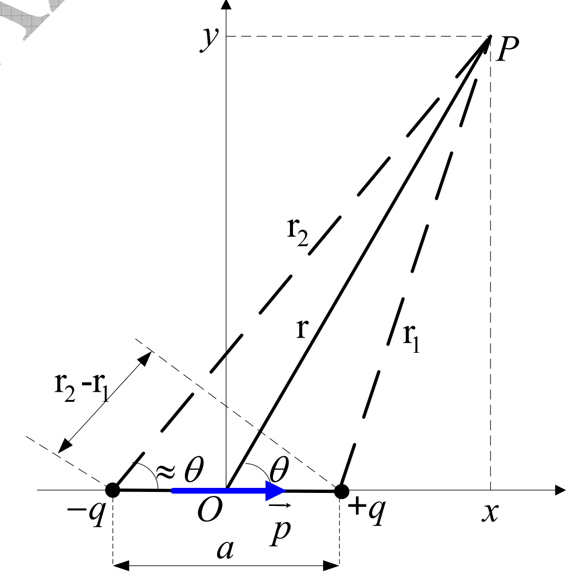


Fig 1.38 : Dipôle électrique

$$V=\sum V_i \Rightarrow V=K\left[\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right] \Rightarrow V=K.q.\frac{(r_2-r_1)}{r_2.r_1}$$

Puisque $r \succ\succ a$, on peut considérer $r_1.r_2 \approx r^2$ et $r_2-r_1=a.\cos\theta$, donc :

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.a.\cos\theta}{r^2} \Rightarrow \boxed{V=\frac{p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^2}} \qquad \textbf{(1.77)}$$

❖ **Champ électrique produit par un dipôle électrique :**

On va essayer de calculer E à partir de l'équation $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V$.

➢ **En coordonnées rectangulaires :** sur la figure 1.38, on peut voir que :

$$r_1=\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{1/2} \quad ; \quad r_2=\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{1/2}$$

D'où :

$$V=K.q\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]$$

Donc :

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{1}{\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{1/2}}\right] \qquad \textbf{(1.78)}$$

Il reste maintenant à effectuer les opérations de dérivation :

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{x-a/2}{\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{3/2}}-\frac{x+a/2}{\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{3/2}}\right] \qquad (1.79)$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q\left[\frac{y}{\left[y^2+(x-a/2)^2\right]^{3/2}}-\frac{y}{\left[y^2+(x+a/2)^2\right]^{3/2}}\right] \qquad (1.80)$$

➢ **En coordonnées polaires :** A partir de la figure 1.39, et par la même méthode suivie précédemment, on calcule les composantes du champ électrique en coordonnées polaires.

Nous savons que $\vec{E}=\vec{E_r}+\vec{E_\theta}$, et donc :

$$\boxed{E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{2p.\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^3} \quad ; \quad E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=p.\frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0.r^3}} \qquad \textbf{(1.81)}$$

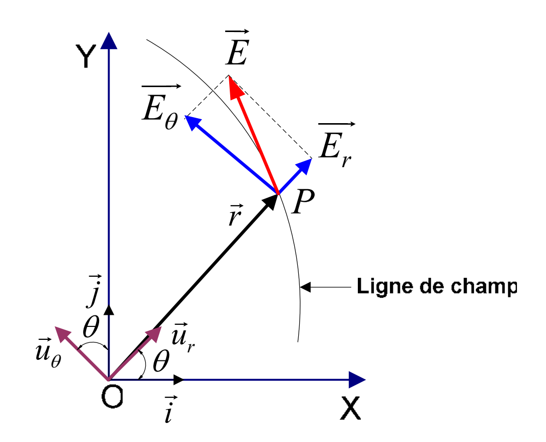


Fig 1.39 : Coordonnées polaires du champ